



N° d'ordre : 1234

THÈSE

Présentée par

Christophe Cossou

pour obtenir le grade de

Docteur en Sciences de L'Université Bordeaux 1

Spécialité : Astrophysique, Plasmas, Corpuscules

Migration et accrétion d'embryons planétaires dans un disque radiatif

Soutenue le : xx Xxxxxxxxx xxxx

Après avis de : Alessandro Morbidelli, Caroline Terquem ..... Rapporteurs

Devant la Commission d'examen formée de :

Aaaaa Bbbbbbbb	Astronome, Université Paris VI, LESIA	Président du Jury
Sean N. Raymond	Chargé de recherche, Université Bordeaux 1, LAB	Directeur de thèse
Arnaud Pierens	Maître de conférence, Université Bordeaux 1, LAB	Directeur de thèse
Richard P. Nelson	Professor, Queen Mary, University of London	Examinateur
Iiii Jjjjjjjjjjj	Professeur, Aix-Marseille, Université OAMP	Examinateur
Kkkkkkkkkkk Llllll	Professeur, Aix-Marseille, Université OAMP	Examinateur
Alessandro Morbidelli	Chargé de Recherche, Nice, OCA	Rapporteur
Caroline Terquem	Lecturer, Oxford, University of Oxford	Rapporteur

– 2013 –



Thèse préparée au
Laboratoire d'Astrophysique de Bordeaux
Observatoire Aquitain des Sciences de l'Univers (OASU, UMR 5804-LAB)
2, rue de l'observatoire
33 271 Floirac CEDEX

Résumé

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Phasellus blandit massa non tellus. Pellentesque blandit. Etiam sapien. Quisque sed massa ac tortor accumsan bibendum. Donec et orci quis mi sollicitudin consectetuer. Donec malesuada. Pellentesque bibendum pellentesque elit. Morbi et diam ac wisi auctor fringilla. Cras nec arcu sed velit dapibus blandit. Maecenas mollis aliquet quam. In eget sem nec orci fringilla sagittis. Suspendisse cursus placerat massa. Pellentesque non metus. Morbi congue tellus eget tellus. Suspendisse justo. Suspendisse potenti. Praesent interdum lorem in velit. Nullam sit amet nisl eget wisi consectetuer consequat. Mauris vel felis. Nulla sed neque.

Nulla facilisi. Maecenas accumsan gravida wisi. Maecenas sodales gravida neque. Mauris in est a ante molestie gravida. In id neque. Ut augue. Duis fringilla ullamcorper risus. Nullam at lorem. Quisque consequat turpis ac libero. Ut auctor ante commodo magna. Donec in magna. Integer sodales. Donec ac nibh eu felis suscipit elementum.

Fusce convallis dolor sit amet dolor. Nulla sit amet pede. Maecenas et ante vitae risus tempus facilisis. Nullam ut tellus et lacus sollicitudin condimentum. Maecenas vitae lorem. Quisque nec leo varius est euismod posuere. Integer ac diam in enim pellentesque pulvinar. Etiam sodales tristique eros. Curabitur non magna. Suspendisse blandit metus vitae purus. Phasellus nec sem vitae arcu consequat auctor. Donec nec dui. Donec sit amet lorem vel erat tristique laoreet. Duis ac felis tincidunt arcu consequat faucibus. Vestibulum ultrices porttitor purus. In semper consequat dolor. Nunc porta. Vestibulum nisl ipsum, rhoncus quis, adipiscing sed, sollicitudin ut, quam.

Mots-clefs : Blabla, blabla, blabla, blabla, blabla, blabla, blabla.

My English thesis title

Abstract

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Phasellus blandit massa non tellus. Pellentesque blandit. Etiam sapien. Quisque sed massa ac tortor accumsan bibendum. Donec et orci quis mi sollicitudin consectetuer. Donec malesuada. Pellentesque bibendum pellentesque elit. Morbi et diam ac wisi auctor fringilla. Cras nec arcu sed velit dapibus blandit. Maecenas mollis aliquet quam. In eget sem nec orci fringilla sagittis. Suspendisse cursus placerat massa. Pellentesque non metus. Morbi congue tellus eget tellus. Suspendisse justo. Suspendisse potenti. Praesent interdum lorem in velit. Nullam sit amet nisl eget wisi consectetuer consequat. Mauris vel felis. Nulla sed neque.

Nulla facilisi. Maecenas accumsan gravida wisi. Maecenas sodales gravida neque. Mauris in est a ante molestie gravida. In id neque. Ut augue. Duis fringilla ullamcorper risus. Nullam at lorem. Quisque consequat turpis ac libero. Ut auctor ante commodo magna. Donec in magna. Integer sodales. Donec ac nibh eu felis suscipit elementum.

Fusce convallis dolor sit amet dolor. Nulla sit amet pede. Maecenas et ante vitae risus tempus facilisis. Nullam ut tellus et lacus sollicitudin condimentum. Maecenas vitae lorem. Quisque nec leo varius est euismod posuere. Integer ac diam in enim pellentesque pulvinar. Etiam sodales tristique eros. Curabitur non magna. Suspendisse blandit metus vitae purus. Phasellus nec sem vitae arcu consequat auctor. Donec nec dui. Donec sit amet lorem vel erat tristique laoreet. Duis ac felis tincidunt arcu consequat faucibus. Vestibulum ultrices porttitor purus. In semper consequat dolor. Nunc porta. Vestibulum nisl ipsum, rhoncus quis, adipiscing sed, sollicitudin ut, quam.

Keywords : Blabla, blabla, blabla, blabla, blabla, blabla, blabla.

Remerciements

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Phasellus blandit massa non tellus. Pellentesque blandit. Etiam sapien. Quisque sed massa ac tortor accumsan bibendum. Donec et orci quis mi sollicitudin consectetuer. Donec malesuada. Pellentesque bibendum pellentesque elit. Morbi et diam ac wisi auctor fringilla. Cras nec arcu sed velit dapibus blandit. Maecenas mollis aliquet quam. In eget sem nec orci fringilla sagittis. Suspendisse cursus placerat massa. Pellentesque non metus. Morbi congue tellus eget tellus. Suspendisse justo. Suspendisse potenti. Praesent interdum lorem in velit. Nullam sit amet nisl eget wisi consectetuer consequat. Mauris vel felis. Nulla sed neque.

Nulla facilisi. Maecenas accumsan gravida wisi. Maecenas sodales gravida neque. Mauris in est a ante molestie gravida. In id neque. Ut augue. Duis fringilla ullamcorper risus. Nullam at lorem. Quisque consequat turpis ac libero. Ut auctor ante commodo magna. Donec in magna. Integer sodales. Donec ac nibh eu felis suscipit elementum.

Fusce convallis dolor sit amet dolor. Nulla sit amet pede. Maecenas et ante vitae risus tempus facilisis. Nullam ut tellus et lacus sollicitudin condimentum. Maecenas vitae lorem. Quisque nec leo varius est euismod posuere. Integer ac diam in enim pellentesque pulvinar. Etiam sodales tristique eros. Curabitur non magna. Suspendisse blandit metus vitae purus. Phasellus nec sem vitae arcu consequat auctor. Donec nec dui. Donec sit amet lorem vel erat tristique laoreet. Duis ac felis tincidunt arcu consequat faucibus. Vestibulum ultrices porttitor purus. In semper consequat dolor. Nunc porta. Vestibulum nisl ipsum, rhoncus quis, adipiscing sed, sollicitudin ut, quam.

Table des matières

Introduction

Oscillant en fonction de l'humeur de l'époque le débat de la vie ailleurs et de l'existence d'autres planètes a animé la communauté scientifique depuis l'antiquité. Souvent influencé par les convictions religieuses et les modèles du système solaire en vigueur, il était parfois même dangereux d'émettre l'hypothèse que d'autres planètes ou d'autres formes de vies puissent exister, l'idée de la pluralité des civilisations étant indissociable de la question de la pluralité des mondes physiques.

Ces questions que l'on pouvait considérer comme philosophiques ou métaphysiques ont changé de registre depuis la découverte, il y a une vingtaine d'années de la première exoplanète [1] [Wolszczan and Frail, 1992].

Bien que cette dernière fut découverte en 1992, c'est véritablement en 1995 avec 51 Peg b [Mayor and Queloz, 1995] que la chasse aux exoplanètes a véritablement commencé. Depuis, multipliant les campagnes d'observations, les missions dédiées et les techniques de détection, on arrive, 20 ans après la première découverte à un catalogue d'exoplanètes toujours plus fourni, montrant une population extrêmement riche et variée. Le nombre variant continuellement, il n'y a pas de sens à donner un chiffre sans la date associée mais au jour du 20 février 2013, on compte pas moins de 861 planètes confirmées.

Avant toute chose, il est important de noter le nombre. Non pas le nombre exact mais plutôt les conséquences qu'implique une liste de plusieurs centaines de planètes : Ce ne sont pas des objets rares ! Si auparavant on pouvait encore en douter, il ne fait aujourd'hui plus aucun doute que les planètes sont des objets communs. C'est d'autant plus flagrant quand on note que la grande majorité des exoplanètes détectées l'ont été autour d'étoiles à moins de 400 pc du Soleil comme illustré dans [Figure 1 page suivante].

En multipliant les méthodes de détections et les instruments, et surtout en ayant de plus en plus de planètes, il devient possible d'estimer la probabilité pour qu'une étoile héberge au moins une planète [Mayor et al., 2011]. D'autres études estiment même la sensibilité de cette fréquence d'occurence en fonction de paramètres stellaires [Fischer and Valenti, 2005, Johnson et al., 2007, Howard et al., 2012] ou planétaires [Mayor et al., 2011, Howard et al., 2010].

Mais le point qui me semble le plus intéressant est la découverte de types de planètes

1. Planète orbitant autour d'une étoile autre que notre Soleil.

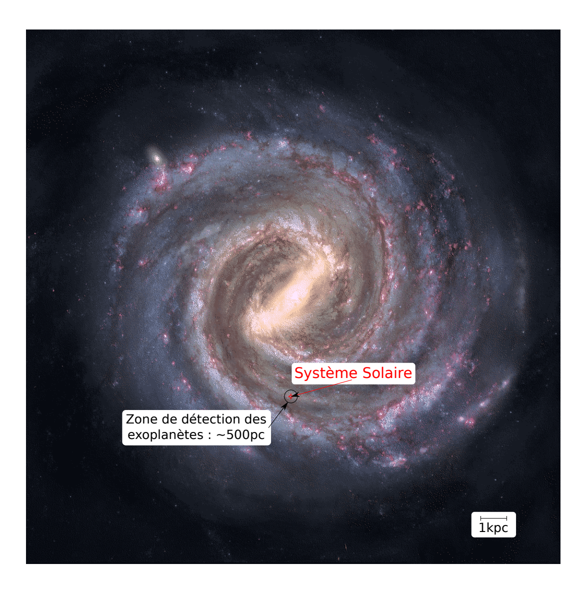
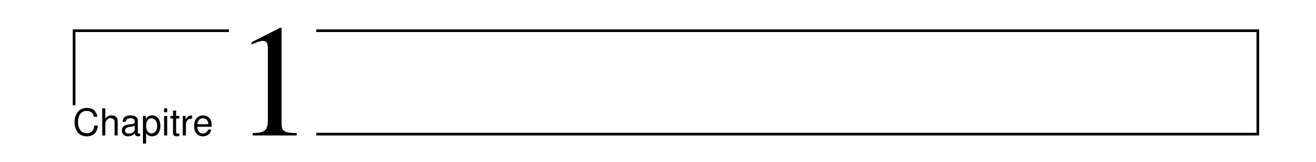


Figure 1 – Image de la voie lactée avec indication de la position approximative du système solaire ainsi que de la zone (en noir) contenant la majorité des exoplanètes détectées à ce jour.

qui n'existent pas dans le système solaire. En un mot : diversité. Que ce soient les jupiters chauds, comme 51 Peg b ou les super terres comme Gliese 1214 b, ces planètes n'ont pas d'équivalent dans le système solaire. Ces variétés de composition, de taille, de systèmes nous offrent un champ de connaissance toujours plus grand dans lequel tester nos modèles de formations planétaire. Ils nous permettent aussi de mieux comprendre notre propre système et comment il s'est formé, et surtout de le placer dans cette immense horlogerie qu'est le catalogue de systèmes exoplanétaires à notre disposition.



Formation Planétaire

Sommaire

1.1 Formation stellaire

Les étoiles se forment à partir de l'effondrement gravitationnel d'un nuage de gaz. Quand ce dernier est suffisamment massif (masse au delà d'une masse critique dite masse de Jeans, de l'ordre de quelques masses solaires, même si ça dépend de la configuration, du volume etc...), son autogravité initie un effondrement du nuage sur lui même, qui peu à peu se fragmente en système découplés.

Au centre de chaque fragment se forme un cœur pré-stellaire à mesure que la température et la pression augmente, jusqu'à atteindre les conditions nécessaires à l'allumage de la fusion de l'hydrogène. On obtient alors une proto-étoile appelée « classe 0 ».

Durant l'effondrement du nuage, la conservation du moment angulaire empêche la contraction du nuage, en particulier dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation du nuage. Ceci ajouté à la pression de radiation, apparue depuis la formation de la proto-étoile conduit à la formation d'un tore autour de l'étoile centrale en quelques dizaines de milliers d'années. Ce stade est appelé « classe I ».

Le tore de gaz est chaud et par conséquence enflé, principalement à cause de l'énergie gravitationnelle résiduelle, mais aussi par le chauffage de la proto-étoile centrale. En quelques centaines de milliers d'années, ce tore devient un disque, à mesure que le rayonnement de corps noir évacue l'énergie par la surface. À mesure que le tore refroidit, et compte tenu de la conservation du moment angulaire qui empêche une contraction rapide dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation, il s'aplatit jusqu'à former un disque.

Un million d'années environ après la formation de la proto-étoile, le disque mince est formé et la proto-étoile est devenu une étoile T-Tauri (objet de classe II). Après quelques millions d'années (typiquement 10 millions d'années), le disque se dissipe et on est dans le cas d'étoiles T-Tauri évoluées ou objets de classe III.

Ces dénominations en classe peuvent sembler étrange mais elles proviennent en premier lieu de l'étude des spectres d'étoiles jeunes qui présentent différentes caractéristiques en fonction du stade d'évolution de l'étoile. [FIGURE 1.1 page suivante] résume la formation stellaire, les différentes phases et en particulier les caractéristiques du spectre d'émission de ces objets.

1.2 Les disques protoplanétaires

1.2.1 Formation et évolution

Durant les différentes phases de formation de l'étoile, alors même que le disque de gaz et de poussière se dissipe a lieu la formation des planètes.

À mesure que le nuage s'effondre sur lui même, et afin de satisfaire à la conservation du moment angulaire, ce dernier voit sa rotation accélérer, même si la rotation du nuage moléculaire était infime au départ. C'est ainsi que le disque d'accrétion, résultat de l'effondrement du nuage de gaz, est en rotation. L'effondrement d'un nuage moléculaire s'effectuant sur plusieurs ordres de grandeurs (en distance), l'accélération de la rotation

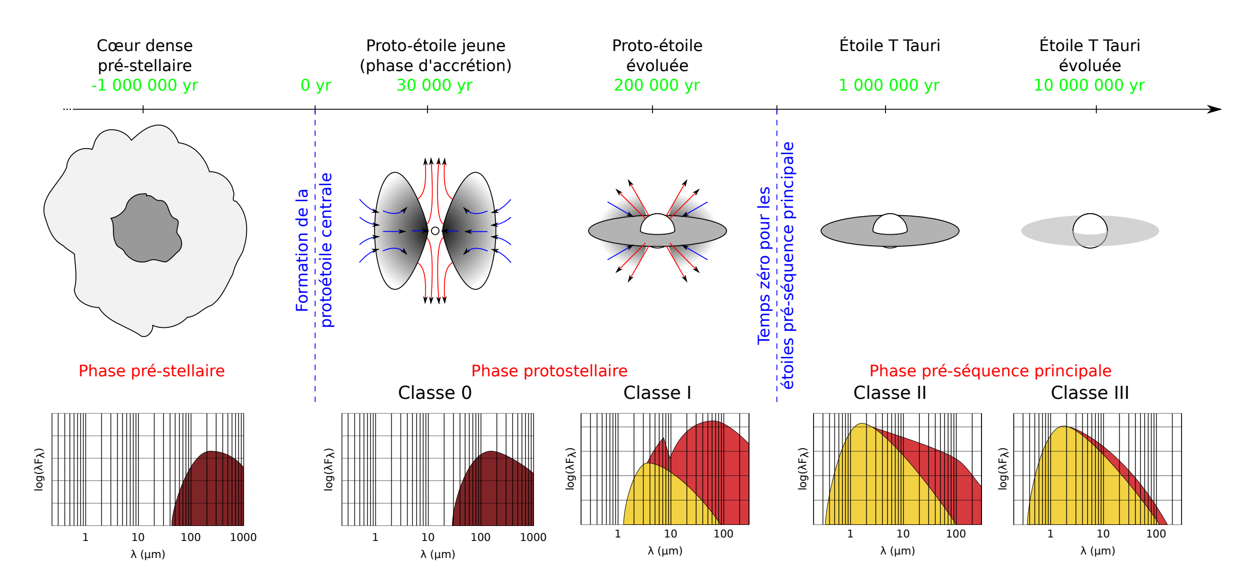


FIGURE 1.1 – Classification empirique des différents stades de formation des étoiles de faible masse, du cœur dense pré-stellaire à la classe III. Schéma basé sur [André, 2002].

est d'autant plus grande.

Initialement, il est hautement improbable que le moment angulaire du nuage soit parfaitement nul. C'est ainsi que même si sa rotation est imperceptible lors des premiers stades de son effondrement gravitationnel, le disque d'accrétion fini toujours en rotation.

1.2.2 Évolution hydrodynamique du disque

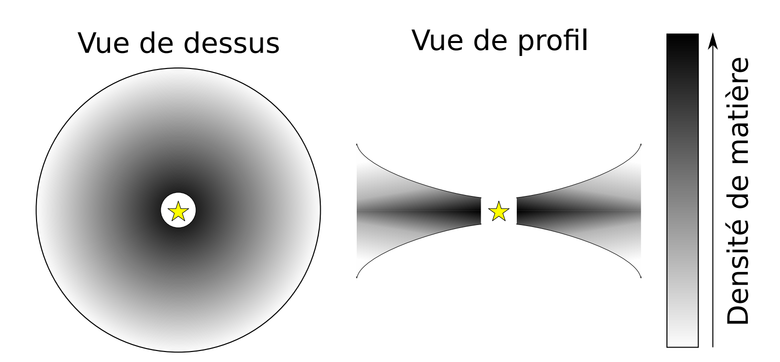


FIGURE 1.2 – Représentation de la répartition radiale et azimutale de gaz dans un disque protoplanétaire.

Avant de considérer l'évolution d'un disque, il est important de regarder sa masse par rapport à la masse de l'étoile centrale. En effet, si la masse du disque est de l'ordre de la masse de l'étoile, alors des instabilités se développent et on ne peut plus négliger l'autogravité du disque.

Le *paramètre de Toomre* Q, défini par [Toomre, 1964, Goldreich and Lynden-Bell, 1965] :

$$Q = \frac{\kappa c_s}{\pi G \Sigma} \tag{1.1}$$

est un indicateur de la stabilité du disque par rapport à l'autogravité.

Dans ce paramètre, $\pi G \Sigma$ représente la masse du disque. La vitesse du son c_s est liée à la pression thermique ; la *fréquence épicyclique* κ détermine quant à elle la force du cisaillement dans le disque.

Si $Q < 1$ alors le gaz est instable gravitationnellement et il commence à s'effondrer sur lui même et former des surdensités à condition que le temps de refroidissement soit inférieur à 3 fois la période orbitale ($\tau_c \lesssim 3\Omega^{-1}$) [Gammie, 2001]. Si $Q > 1$, le disque est stable.

À partir du paramètre Q, on peut dériver une condition sur le rapport de masse entre étoile et disque pour que l'auto-gravité soit négligeable, ce qui donne [Gammie, 2001] :

$$\frac{M_\mathrm{d}}{M_\star} \lesssim \frac{H}{R} \tag{1.2}$$

Nous ne considérerons que des disques dont la masse M_d est faible devant la masse de l'étoile $M_\star$. Si tel n'était pas le cas, le temps pour que le disque perde suffisamment de masse pour se retrouver dans le cas qui nous intéresse sera court devant la vie du disque et le temps de formation planétaire. Étant donné qu'on ne s'intéresse qu'aux derniers stades de la formation planétaire, à savoir quand les embryons planétaires ont une masse de l'ordre du dixième de masse terrestre au minimum, il est raisonnable de penser que le disque sera dans un stade peu dense où l'approximation $Q > 1$ sera valable.

Dans un tel cas, c'est le potentiel gravitationnel de l'étoile qui domine la dynamique du gaz. En négligeant l'effet de la pression de ce dernier, on peut donc écrire la vitesse angulaire du gaz comme étant égale à la vitesse angulaire képlerienne :

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM_\star}{R^3}} \tag{1.3}$$

où G est la constante de gravitation, et R la distance à l'étoile. Dans la pratique, il est à noter que la vitesse est légèrement sous-képlerienne.

Il existe une force de cisaillement entre deux anneaux de gaz concentriques, dûs à leur différence de vitesse. Cette différence de vitesse génère des frottements à cause de la viscosité du disque ν (dont nous parlerons plus en détail plus loin [§ 1.2.4 page 28]) qui chauffe le gaz en lui faisant perdre de l'énergie. En conséquence, une partie de l'énergie gravitationnelle du gaz est convertie en chaleur, qui est ensuite évacuée par le rayonnement de corps noir du gaz.

La première conséquence est qu'un terme visqueux va apparaître dans l'équation de l'énergie, comme nous le verrons par la suite.

La deuxième conséquence, c'est que le gaz perd de l'énergie, et donc dérive lentement vers l'étoile centrale qui accrète petit à petit le gaz du disque.

On définit donc une vitesse de dérive négative $\overrightarrow{v_d} = v_r \hat{e}_r$, orientée vers l'étoile, qui entraine petit à petit le gaz du disque (avec v_r négatif).

Dans la suite de la section, nous allons nous intéresser à la conservation de différentes quantités, que ce soit la masse ou le moment angulaire. Pour cela nous allons définir un

anneau de référence, portion du disque sur laquelle nous allons faire le bilan. Le but est ici de présenter d'où viennent les équations et plus précisément d'où viennent les termes des équations.

Afin de décrire l'évolution hydrodynamique du disque de gaz, nous allons utiliser successivement la **conservation de la masse**, et la **conservation du moment angulaire.** Les démonstrations qui vont suivre ont été déjà faites de nombreuses fois, notamment par [Pringle, 1981].

Structure verticale du disque

On s'intéresse à la répartition de masse verticalement dans le disque. Afin de définir les quantités importantes qui s'y rapporte, nous allons écrire l'équation de l'équilibre hydrostatique. On a alors :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = \overrightarrow{g}.\hat{e}_z \tag{1.4}$$

$$= \left(-\frac{GM}{R^3}\hat{e}_r\right).\hat{e}_z \tag{1.5}$$

$\overrightarrow{g}$ est orienté vers l'étoile centrale, selon la direction r (en sphérique). En projetant sur l'axe z pour effectuer le produit scalaire, et en faisant l'approximation que $r \sim a$ on obtient alors :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = -\Omega^2 z \tag{1.6}$$

En considérant un disque isotherme selon z et d'après la loi des gazs parfaits

$$p = \frac{\rho k_B T}{\mu m_H} \tag{1.7}$$

il vient

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = -\frac{\mu m_H \Omega^2}{k_B T}\rho z \tag{1.8}$$

On obtient alors :

$$\rho(z) = \rho_0 \exp\left(-\frac{z^2}{2H^2}\right) \tag{1.9}$$

où ρ_0 est la densité volumique du disque de gaz dans le plan médian et H l'échelle de hauteur du disque est définie par (dans la limite isotherme) :

$$H = \sqrt{\frac{k_B T}{\Omega^2 \mu m_H}} \tag{1.10}$$

Sachant que la vitesse du son, définie par :

$$c_s{}^2 = \frac{P}{\rho} = \frac{k_B T}{\mu m_H} \tag{1.11}$$

dans le cas d'un gaz parfait, on peut alors écrire la relation suivante entre l'échelle de hauteur et la vitesse du son :

$$c_s = H\Omega \tag{1.12}$$

On considèrera dans la suite les quantités moyennées selon z, et en particulier on défini la densité de surface Σ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\Sigma &= \int_{-\infty}^{+\infty} \rho \, \mathrm{d}z \\ &= \rho_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2H^2}\right) \mathrm{d}z \\ \Sigma &= \sqrt{2\pi}\rho_0 H \end{aligned} \tag{1.13}$$

Bilan de masse

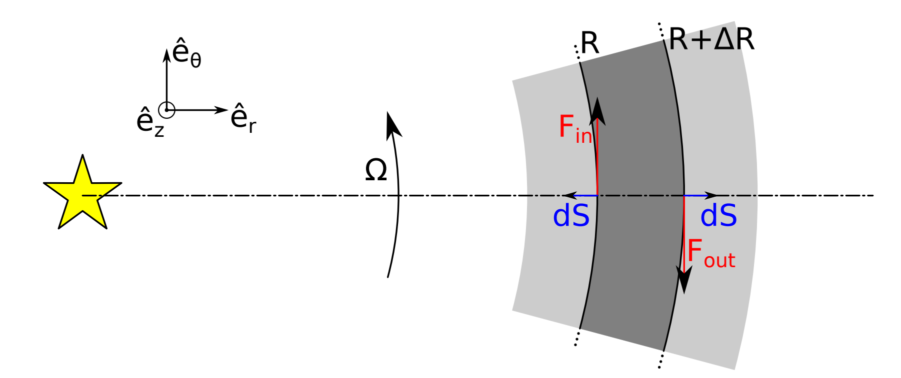


FIGURE 1.3 – Représentation d'un anneau de largeur ΔR et du bilan de moment angulaire de ce dernier.

On cherche dans un premier temps à faire le bilan de masse de l'anneau considéré. Sa masse s'écrit :

$$m_a = 2\pi R \Delta R \Sigma(R) \tag{1.14}$$

Soit $v_r \hat{e}_r$ la vitesse radiale du gaz (avec $v_r < 0$ dans notre cas). Cette vitesse est responsable d'un certain taux d'accrétion du gaz du disque sur l'étoile centrale. On cherche maintenant à modéliser cette accrétion pour le bilan de moment cinétique sur l'anneau.

Pour cela, on cherche à exprimer la variation de masse de l'anneau, ainsi que le moment cinétique emporté par cette variation de masse.

Au bord interne R, par unité de temps, la masse entrant ou sortant de l'anneau peut-être exprimée comme un flux :

$$\mathrm{d}F_M = \Sigma \cdot 2\pi r \cdot \left(-\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}\right) \tag{1.15}$$

En effet, en multipliant la circonférence de l'anneau par la vitesse, on obtient une sorte de surface par unité de temps qui représente ce qui sort de la frontière virtuelle représentée par l'anneau en $r = R$.

La flux de matière doit être négatif si la masse sort de l'anneau. Les éléments de surface étant orientés vers l'extérieur, un vecteur vitesse colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ implique que la matière sort de l'anneau. Ceci explique la présence du signe négatif dans l'expression du flux de matière.

On a ainsi aux deux bords de l'anneau :

$$\mathrm{d}F_M(R) = \Sigma(R) \cdot 2\pi R \cdot v_r(R) \tag{1.16a}$$

$$\mathrm{d}F_M(R + \Delta R) = -2\pi(R + \Delta R) \cdot v_r(R + \Delta R) \cdot \Sigma(R + \Delta R) \tag{1.16b}$$

v_r étant négatif, on a bien une perte de masse en $r = R$ et un gain de masse en $r = R + \Delta R$.

La conservation de la masse implique alors que la dérivée temporelle de la masse de l'anneau est égale au flux de masse à travers sa surface. On a ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(2\pi R \Delta R \Sigma(R)\right) = \mathrm{d}F_M(R) + \mathrm{d}F_M(R + \Delta R)$$

En faisant tendre l'épaisseur ΔR de l'anneau vers 0, on obtient alors :

$$\boxed{\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(R v_r \Sigma\right) = 0} \tag{1.17}$$

Bilan de moment cinétique/angulaire

On fait maintenant un bilan des variations de moment angulaire pour l'anneau de gaz. Pour cela on dit que la variation de moment angulaire (que l'on écrit en dérivant $J_a(t)$) est égale aux variations de moment angulaires induites aux bords de l'anneau par échange de masse à laquelle s'ajoute la différence entre les deux couples visqueux qui s'appliquent au bord externe et interne. Ce qui donne :

$$\frac{\mathrm{d}J_a}{\mathrm{d}t} = \mathrm{d}J(R + \Delta R) + \mathrm{d}J(R) + \Gamma_{\text{out}} - \Gamma_{\text{in}} \tag{1.18}$$

Le moment cinétique de l'anneau est défini par :

$$\overrightarrow{J_a} = \overrightarrow{R} \wedge \left(m_a \overrightarrow{v(R)}\right)$$

$$\overrightarrow{J_a} = 2\pi R^3 \Delta R \Sigma(R) \Omega(R) \hat{e}_z \tag{1.19}$$

où Σ et Ω sont la densité de surface et la vitesse angulaire du gaz à la position R dans le disque.

Le flux de moment cinétique est simplement défini comme la quantité de moment cinétique emportée ou apportée par le flux de masse définis précédemment (1.16 page précédente) :

$$\mathrm{d}J(R) = 2\pi v_r(R)\Sigma(R)\cdot R^3\Omega(R)\hat{e}_z \tag{1.20a}$$

$$\mathrm{d}J(R+\Delta R) = -2\pi v_r(R+\Delta R)\Sigma(R+\Delta R)\cdot(R+\Delta R)^3\,\Omega(R+\Delta R)\hat{e}_z \tag{1.20b}$$

À ceci s'ajoute la variation de moment cinétique induite par la friction entre anneaux concentriques, en d'autres termes, dus à la viscosité du disque. Cette variation de moment cinétique est représentée sous la forme d'un couple exercé par les anneaux internes et externes à celui considéré.

La force visqueuse par unité de longueur est définie par :

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{vis}} = \nu\Sigma A = \nu\Sigma r\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r} \tag{1.21}$$

où $A = r\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}$ est le taux de cisaillement.

La force visqueuse induite par les anneaux entourant l'anneau considéré est alors :

$$\overrightarrow{F_{\mathrm{in}}}(R) = 2\pi\nu\Sigma R^2\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}\,(R)\hat{e}_\theta \tag{1.22a}$$

$$\overrightarrow{F_{\mathrm{out}}}(R+\Delta R) = 2\pi\nu\Sigma(R+\Delta R)^2\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}\,(R+\Delta R)\cdot\hat{e}_\theta \tag{1.22b}$$

L'anneau interne tournant plus vite, la force est dirigée dans le sens de rotation $\hat{e}_\theta$. À l'inverse, l'anneau externe tourne moins vite, il tend à freiner l'anneau de référence et s'oppose à son mouvement. La force est donc opposée au sens de rotation.

Ainsi, le couple $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{r}\wedge\overrightarrow{F}$ issu de chacun des anneaux entourant celui de référence s'écrit :

$$\overrightarrow{\Gamma_{\mathrm{in}}} = 2\pi\nu\Sigma R^3\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}\,(R)\hat{e}_z \tag{1.23a}$$

$$\overrightarrow{\Gamma_{\mathrm{out}}} = 2\pi\nu\Sigma(R+\Delta R)^3\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}\,(R+\Delta R)\hat{e}_z \tag{1.23b}$$

En utilisant (1.19 page précédente), (1.20), (1.23), dans (1.18 page précédente) il vient alors :

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{\frac{\partial}{\partial r}(r^2\Omega)}\frac{\partial}{\partial r}\left[\nu\Sigma r^3\left(-\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}\right)\right]\right\} \tag{1.24}$$

Dans le cas d'un disque Képlerien ($\Omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$) on obtient finalement :

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\sqrt{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\nu \Sigma r^{1/2}\right)\right] \tag{1.25}$$

Le calcul détaillé est disponible [§ B.1 page 100].

Cette équation a nécessité les approximations suivantes :

1. On suppose que le potentiel gravitationnel est indépendant du temps ($\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = 0$), c'est à dire que la masse de l'étoile est constante, l'accrétion ayant un effet négligeable.
2. On suppose que le mouvement du gaz est képlerien $\Omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$, ce qui n'est pas rigoureusement vrai, la pression du gaz rendant le mouvement légèrement sous-képlerien.

Temps de vie et dispersion du disque

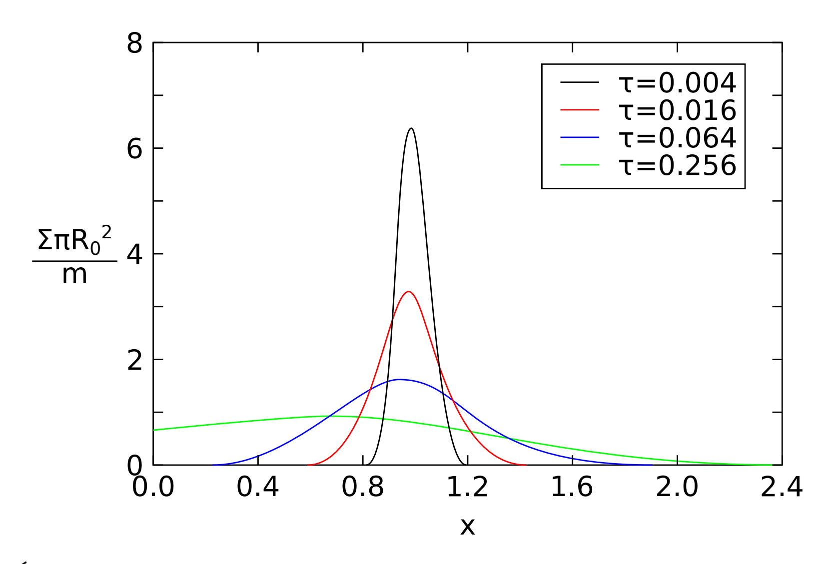


FIGURE 1.4 – Évolution visqueuse d'un anneau de matière de masse m et de rayon R_0. La densité de surface est montrée comme une fonction de la longueur dédimensionnée $x = R/R_0$ et du temps adimensionné $\tau = 12\nu t/{R_0}^2$.

Cette équation permet de modéliser l'évolution visqueuse d'un disque au cours du temps. [FIGURE 1.4], tirée de Pringle [1981] et recalculée illustre l'évolution visqueuse d'un anneau de matière de masse m dans des unités adimensionnées de distance et de temps.

On situe généralement le temps de vie d'un disque protoplanétaire autour de quelques millions d'années. Cette information est obtenue de plusieurs études de d'amas d'étoiles d'âges différents dans lesquelles on mesure le taux d'étoiles possédant un excès infrarouge (signe de présence d'un disque) [Williams and Cieza, 2011]. 70% à 80% des étoiles jeunes ($t < 1\,$Myr) possèdent un disque [Winston et al., 2007, Gutermuth et al., 2008], 40 à

50% des étoiles dans des amas d'âge compris entre 2 et 3 millions d'années en possèdent un [Lada et al., 2006, Sung et al., 2009] tandis que moins de 20% des étoiles dans des amas d'environ 5 millions d'années ont un disque [Currie et al., 2009].

Par la rareté des disques en train de se dissiper, les observations suggèrent aussi que les disques se dissipent très rapidement, avec un temps de dispersion d'environ 10^5 ans [Simon and Prato, 1995, Wolk and Walter, 1996]. La dissipation visqueuse n'explique alors pas comment le disque peut subsister pendant plusieurs millions d'années, mais se dissiper complètement en 500 000 ans. Clarke et al. [2001] ont montré qu'il était possible d'expliquer ce comportement à deux temps caractéristiques à l'aide de la photoévaporation.

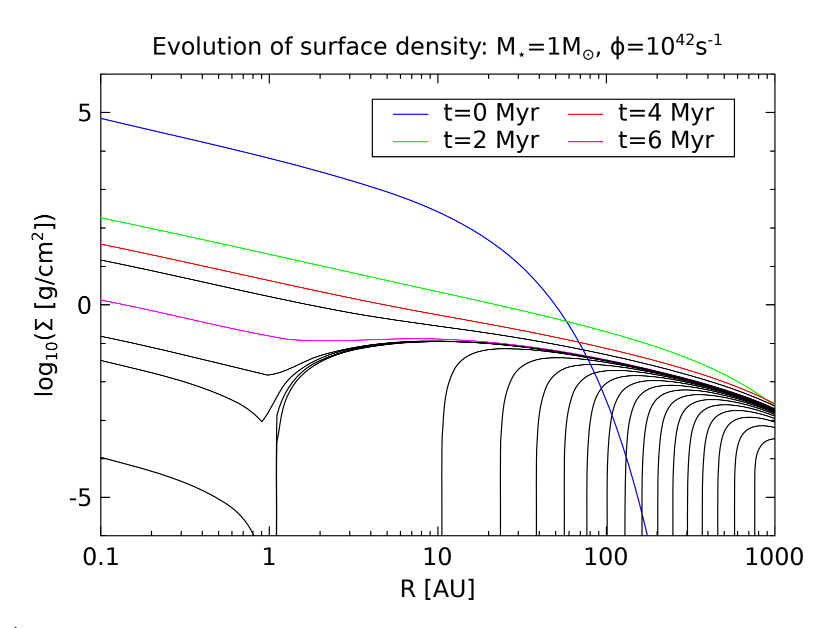


FIGURE 1.5 – Évolution de la densité de surface en fonction du temps dans une simulation qui modélise la dissipation du disque protoplanétaire par évolution visqueuse et photoévaporation. À $t = 6.20$ Myr le disque est totalement dissipé. Figure adaptée de Alexander et al. [2006].

Le principe de la photoévaporation est que le rayonnement de l'étoile permet de dissocier le dihydrogène ainsi que de fournir de l'énergie cinétique aux atomes du gaz. À partir d'un rayon r_g qui représente la distance à partir de laquelle l'énergie fournie par les photons de l'étoile devient suffisante pour contrebalancer les effets de sa gravité, la photoévaporation permet d'évaporer une partie du gaz superficiel du disque. Le disque va alors se creuser jusqu'à séparer le disque en deux. Les parties internes du disques ne sont alors plus alimentées par les parties externes. Des simulations montrent que les parties externes se dispersent rapidement une fois les parties internes accrétées [Alexander et al., 2006]. [FIGURE 1.5] montre l'évolution du profil radial de densité en fonction du temps en présence de l'évolution visqueuse et de la photoévaporation.

1.2.3 Profil de température

Du point de vue de la température, il y a principalement deux types de disques :

- les *disques actifs* : la source de température est le disque lui même, qui par *chauffage visqueux* (frottements) va convertir de l'énergie gravitationnelle en chaleur ;

– les *disques passifs* : la source de chaleur/température est l'étoile centrale qui éclaire le disque.

Un disque peut à la fois être actif et passif, mais généralement on essaie d'approximer, de considérer que l'un est négligeable devant l'autre. De plus, un disque aura des zones actives et des zones passives, c'est à dire que certaines zones seront principalement chauffées par la viscosité alors que d'autres le seront par l'*irradiation de l'étoile*.

Afin de déterminer le profil de température, il faut écrire l'équation de conservation de l'énergie, qui va tenir compte de tous les termes source et toutes les pertes, par unité de surface.

On a tout d'abord les pertes par rayonnement de corps noir. Ensuite, il y a les termes sources. Pour un disque actif, le terme source est le chauffage visqueux. Pour un disque passif, c'est l'irradiation de l'étoile [Chiang and Goldreich, 1997]. Dans notre cas, il y a un terme dû à l'enveloppe du disque, un dû à l'irradiation de l'étoile centrale, et enfin un dernier dû au chauffage visqueux.

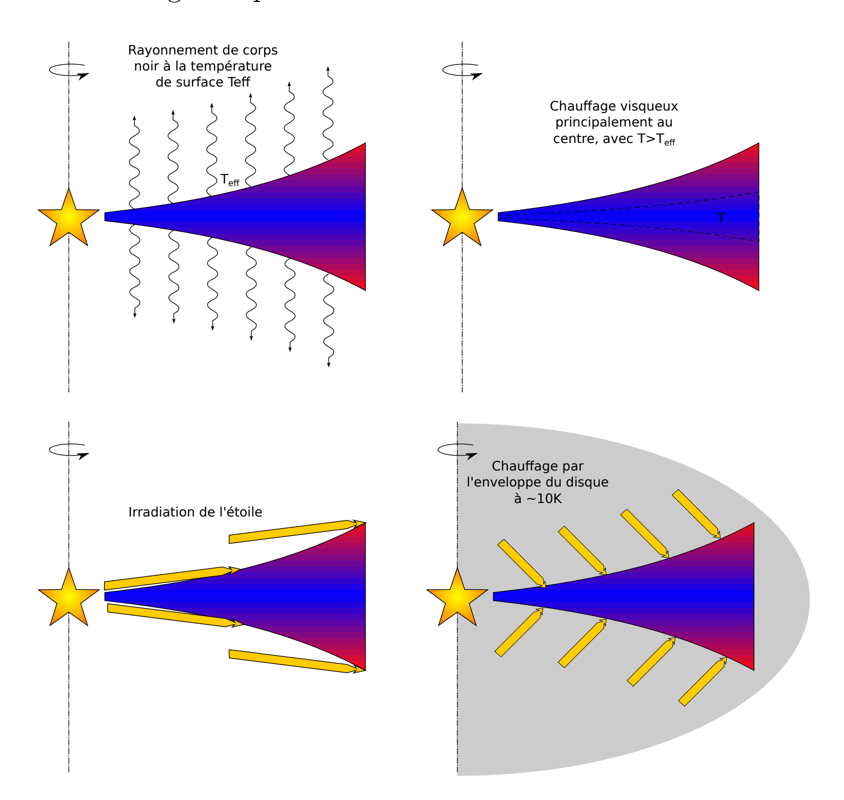


FIGURE 1.6 – Représentation du bilan thermique d'un disque

Refroidissement radiatif

Par toute la surface du disque, qui est à une température T_{eff} en surface, on a des pertes par rayonnement de corps noir :

$$P_{\text{cn}} = -2\sigma {T_{\text{eff}}}^4 \tag{1.26}$$

où σ est la constante de Stephan. Ces dernières doivent être multiplié par deux, en effet, il y a des pertes par rayonnements des deux cotés du disque à une position donnée.

T_{eff} est une estimation de la température effective du disque à sa surface Hubeny [1990] :

$$T_{\text{eff}}{}^4 = \frac{T^4}{\tau_{\text{eff}}} \tag{1.27a}$$

avec

$$\tau_{\text{eff}} = \frac{3}{8}\tau + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4\tau} \tag{1.27b}$$

où $\tau = \kappa\Sigma/2$ est la profondeur optique verticale moyenne, κ étant l'opacité du disque (l'opacité sera détaillée dans [§ 1.2.6 page 31]).

Cette température effective est le résultat d'un transfert de rayonnement depuis le cœur du disque, à une température T qui se refroidit, et chauffe les différentes couches successives jusqu'à atteindre le bord du disque. Il résulte alors une température T_{eff} plus faible que la température dans le plan du disque.

Chauffage par l'enveloppe

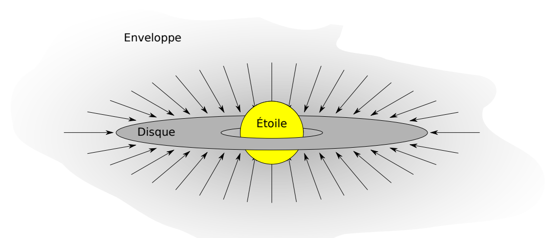


FIGURE 1.7 – Représentation de l'effondrement d'un nuage moléculaire et des différentes parties qui composent le système en effondrement.

L'enveloppe [FIGURE 1.7] provient de l'effondrement continu du nuage moléculaire. C'est un reste diffus qui alimente continuellement le disque en matière. Mais cette enveloppe, qui possède une température que l'on fixe ici à $T_{\text{en}} = 10\,\text{K}$ contribue aussi au bilan d'énergie du disque en apportant la contribution uniforme suivante :

$$C_{\text{en}} = 2\sigma T_{\text{en}}{}^4 \tag{1.28}$$

> **Remarque :** La température de l'enveloppe étant très faible, cette dernière ne contribue que dans les parties externes du disque, là où la densité de surface du gaz est très faible, rendant du même coup le chauffage visqueux extrêmement ténu lui aussi.

Chauffage par l'étoile

La surface du disque reçoit de la lumière de l'étoile centrale. Soit $R_\star$, $L_\star$ respectivement le rayon et la luminosité de l'étoile. Soit ε l'albédo du disque, que l'on choisi typiquement égal à 0.5.

Le flux incident est alors [Menou and Goodman, 2004, eq. (7)] :

$$F_{\rm irr} = \frac{L_\star(1-\varepsilon)}{4\pi r^2}\alpha \qquad (1.29)$$

où α (avec $\alpha \ll 1$ représente l'angle entre les rayons incidents et la surface du disque.

D'après notamment [Chiang and Goldreich, 1997, eq. (5)], cet angle peut être écrit comme :

$$\alpha = 0.4\frac{R_\star}{r} + r\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{H}{r}\right) \qquad (1.30)$$

On note que dans cette expression, le premier terme illustre le fait que l'étoile n'est pas ponctuelle, et que ceci a un effet sur l'irradiation dès que l'on s'approche de cette dernière. Le deuxième terme représente la surface du disque qui intercepte le rayonnement incident, et qui est fonction de la variation d'échelle de hauteur du disque (plus le disque est évasé, et plus la paroi qui intercepte le rayonnement est abrupte).

Il vient enfin, en exprimant la luminosité de l'étoile en fonction de sa température et de son rayon, l'expression suivante :

$$C_{\rm irr} = 2\sigma {T_\star}^4\frac{{R_\star}^2}{r^2}(1-\varepsilon) * \left[0.4\frac{R_\star}{r} + r\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{H}{r}\right)\right] \qquad (1.31)$$

Remarque : Il faut cependant noter qu'une approximation implicite à été faite, c'est de dire que $h_p \sim h$, où h_p est la position verticale dans le disque où les photons stellaires sont absorbés. En effet, l'absorption des photons ne dépend pas simplement de la densité mais aussi de l'opacité du disque aux photons stellaires, qui dépend de la composition du disque.

Dans le cadre d'un disque optiquement épais, il devient possible de considérer $h_p \sim h$

Chauffage visqueux

On considère un fluide incompressible. Il peut paraître étonnant de considérer un disque de gaz comme étant un fluide incompressible. Mais en fait l'aspect compressible va surtout se manifester lors de la mise à l'équilibre, générant des ondes de chocs par exemple. Mais une fois le disque stabilisé tout se passe comme si on avait un fluide incompressible. C'est matérialisé par le fait que la vitesse dans le disque est considérée comme inférieure à la vitesse du son dans le milieu c_s, au delà de laquelle on aura des ondes des chocs ayant une incidence sur le bilan thermique. Ainsi donc, en considérant un fluide incompressible, on peut partir de l'expression de la variation d'énergie cinétique (qui est l'inverse du chauffage, les pertes cinétiques étant converties en chaleur par la viscosité) [Landau and Lifschitz, 1989, (16.3)] :

$$\frac{\partial E_c}{\partial t} = -\frac{1}{2}\int \eta (T_{ik})^2\,\mathrm{d}V \qquad (1.32)$$

$$T_{ik} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)$$

où $\eta = \rho\nu$ est la viscosité dynamique [1]

À partir de [Landau and Lifschitz, 1989, (15.8) et (15.17)], on extrait de manière assez directe l'expression du tenseur T_{ik} en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} T_{rr} &= 2\,\frac{\partial v_r}{\partial r}\,, & T_{r\varphi} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}\right), \\ T_{\varphi\varphi} &= 2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r}\right), & T_{\varphi z} &= \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi}\right), \\ T_{zz} &= 2\,\frac{\partial v_z}{\partial z}\,, & T_{rz} &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right). \end{aligned} \tag{1.33}$$

sachant que le tenseur est symétrique en statique, ce qui donne :

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} T_{rr} & T_{r\varphi} & T_{rz} \\ T_{r\varphi} & T_{rr} & T_{\varphi z} \\ T_{rz} & T_{\varphi z} & T_{zz} \end{pmatrix} \tag{1.34}$$

À partir de ces expressions, nous allons procéder à quelques simplifications, moyennant quelques approximations :

- On considère tout d'abord que $v_z = 0$ en invoquant le fait que le disque est à l'équilibre hydrostatique verticalement.
- Ensuite, on néglige tous les termes en $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ car le disque est axisymétrique.
- On néglige enfin tous les termes en v_r devant les termes en v_φ étant donné que la vitesse de dérive (liée à l'accrétion) est beaucoup plus petite que la vitesse de rotation due au mouvement képlerien. En effet, la vitesse de dérive est une conséquence des pertes d'énergie par frottement visqueux entre deux anneaux due à la différence de vitesse de leur mouvement képlerien.

Seul le terme $T_{r\varphi}$ reste :

$$T_{r\varphi} = \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}$$

avec $v_\varphi = r\Omega$

$$T_{r\varphi} = r\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r} \tag{1.35}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_c}{\partial t} &= -\frac{1}{2}\int \eta (T_{ik})^2\,\mathrm{d}V \\ &= -\frac{1}{2}\int \eta \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} {T_{ij}}^2\,\mathrm{d}V \\ &= -\frac{1}{2}\int \eta\left({T_{r\varphi}}^2 + {T_{\varphi r}}^2\right)\mathrm{d}V \end{aligned}$$

1. ν étant la viscosité cinématique et ρ la densité volumique de gaz.

Le tenseur est symétrique, on a donc $T_{r\varphi} = T_{\varphi r}$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\int \eta \left(2{T_{r\varphi}}^2\right) \mathrm{d}V \\
&= -\iint \rho\nu \left(r\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}\right)^2 \mathrm{d}S\,\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

En utilisant une vitesse angulaire képlerienne $\Omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$ on obtient alors :

$$
\begin{aligned}
&= -\int \Sigma\nu \left(-\frac{3}{2}\Omega\right)^2 \mathrm{d}S \\
\frac{\partial E_c}{\partial t} &= -\frac{9}{4}\int \Sigma\nu\Omega^2\,\mathrm{d}S
\end{aligned}
$$

La variation d'énergie cinétique est négative, cette perte est convertie en chaleur par chauffage visqueux. Le chauffage visqueux intégré sur toute la surface du disque peut ainsi être défini comme :

$$C_{\mathrm{vis/tot}} = -\frac{\partial E_c}{\partial t}$$

de sorte qu'on peut écrire le chauffage visqueux par unité de surface comme étant égal à :

$$C_{\mathrm{vis}} = \frac{9}{4}\nu\Sigma\Omega^2 \tag{1.36}$$

Bilan

On cherche maintenant la température d'équilibre du disque, compte tenu de tous les termes rentrant dans l'équation bilan de l'énergie du disque. Il vient alors, en considérant le chauffage visqueux, l'irradiation de l'étoile centrale, le chauffage par l'enveloppe et les pertes par radiation à la surface du disque :

$$
\begin{aligned}
0 &= P_{\mathrm{cn}} + C_{\mathrm{en}} + C_{\mathrm{irr}} + C_{\mathrm{vis}} \\
0 &= -2\sigma\frac{T^4}{\frac{3}{8}\tau + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4\tau}} + 2\sigma{T_{\mathrm{en}}}^4 + 2\sigma{T_\star}^4\frac{{R_\star}^2}{r^2}(1-\varepsilon) * \left[0.4\frac{R_\star}{r} + r\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{H}{r}\right)\right] + \frac{9}{4}\nu\Sigma\Omega^2
\end{aligned}
\tag{1.37}
$$

Dans la pratique, c'est une équation de l'on résout de manière numérique, par itération. En effet, beaucoup de paramètres dépendent de la température, alors même que c'est la variable que l'on recherche.

Ce calcul est lui même extrêmement dépendant de la définition que l'on choisi pour l'opacité κ et de la dépendance de cette dernière en fonction de la température, la densité ou la pression.

1.2.4 La viscosité du disque

La viscosité moléculaire, viscosité généralement considérée quand on étudie la dynamique d'un fluide, peut être définie par :

$$\nu_m \sim \lambda c_s \tag{1.38}$$

où c_s est la vitesse du son dans le milieu et λ, libre parcours moyen dans le gaz avec une concentration de particule n est :

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma_{\text{mol}}} \tag{1.39}$$

On cherche ici à faire un calcul d'ordre de grandeur, on ne se préoccupe pas des détails plus fins qui seraient normalement nécessaire pour calculer une viscosité moléculaire.

On prend pour section efficace de collisions celle de l'hydrogène moléculaire [Chapman and Cowling, 1970] :

$$\sigma_{\text{mol}} = 2 \times 10^{-15}\,\text{cm}^2 \tag{1.40}$$

On considère ensuite un disque dont la densité de surface Σ à 1 AU vaut $\Sigma_0 = 500\,\text{g/cm}^2$. En utilisant (1.13 page 18) on a alors $\rho = 2.67 \cdot 10^{-10}\,\text{g/cm}^{-3}$. Il vient la concentration $n = 6.8 \cdot 10^{13}\,\text{cm}^{-3}$. On obtient alors une viscosité moléculaire à 1 AU de l'ordre de :

$$\nu_m \sim 1.0 \times 10^6\,\text{cm}^2/\text{s} \tag{1.41}$$

Le temps caractéristique de l'évolution visqueuse qui en découle est alors :

$$t_\nu \simeq \frac{r^2}{\nu_m} \qquad = 6.5 \times 10^{12}\,\text{ans} \tag{1.42}$$

c'est à dire plus d'un million de fois le temps de vie observé des disques protoplanétaires qui se situe autour du million d'années [Williams and Cieza, 2011].

En conséquence, quand on parle de viscosité ν [2] dans un disque, ce n'est pas la viscosité moléculaire classique, bien trop faible aux densités rencontrées. On suppose généralement une viscosité due à la turbulence qui est beaucoup plus importante que la viscosité moléculaire, mais qui peut être traitée par les mêmes équations.

Il est rare que la viscosité soit calculée de manière cohérente. L'importante augmentation du temps de calcul n'apporterait pas forcément beaucoup plus de précisions étant donné les nombreuses incertitudes sur la poussière, le couplage et le champ magnétique.

La première hypothèse est de considérer une viscosité constante. Ce n'est certainement pas satisfaisant, sûrement éloigné de la vérité, mais on n'a ainsi qu'un seul paramètre et on n'ajoute pas de surcouche de complexité apportant son lot supplémentaire d'incertitude. Reste qu'une viscosité constante dans un disque très étendu, par exemple allant de 0.1 AU à 100 AU n'est certainement pas cohérent avec la physique du disque.

Un autre modèle très répandu pour la viscosité du disque est la prescription α.

2. Viscosité cinématique

Les disques alpha

On peut introduire un paramètre adimensionné α [Shakura and Sunyaev, 1973]. Dans ce formalisme, plusieurs hypothèses sont faites :
- On considère que la turbulence est sub-sonique.
- L'échelle des tourbillons des turbulences est plus petite que l'échelle de hauteur du disque

Le mécanisme qui a le plus de chance d'être à l'origine de la viscosité alpha est l'*Instabilité Magnéto-Rotationnelle* (MRI) [Balbus and Hawley, 1991].

En conséquence, on peut définir la viscosité ν associée à la turbulence comme étant

$$\nu = \alpha c_s H \tag{1.43}$$

où c_s est la vitesse du son et H l'échelle de hauteur du disque. α (avec $\alpha \ll 1$) est alors un paramètre adimensionné qui permet de définir plus ou moins l'intensité des turbulences, et donc la viscosité qui leur est associée. Une valeur typique d'α se situe entre 10^{-2} et 10^{-4}.

Ce modèle permet de définir une viscosité non constante dans le disque de gaz ce qui semble déjà plus cohérent avec un disque de gaz étendu ($[0.1 - 100]$ AU par exemple).

Pourtant, le modèle α n'est pas forcément la panacée en comparaison du modèle à viscosité constante. En effet, la complexité est ici masquée dans la valeur qu'il faut attribuer au paramètre α. D'une part il est difficile d'estimer la valeur du paramètre α mais en plus il n'y a aucune raison physique qui permet de justifier qu'α soit constant dans tout le disque (approximation généralement sous-jacente au choix de la prescription α pour la viscosité).

Ceci justifie donc que l'on mette ces deux modèles en concurrence, sans placer le modèle α au dessus du modèle à viscosité constante. Les incertitudes étant tellement grandes dans les deux cas, il est justifié d'explorer ces deux modèles et de les comparer quand cela nous est donné de le faire.

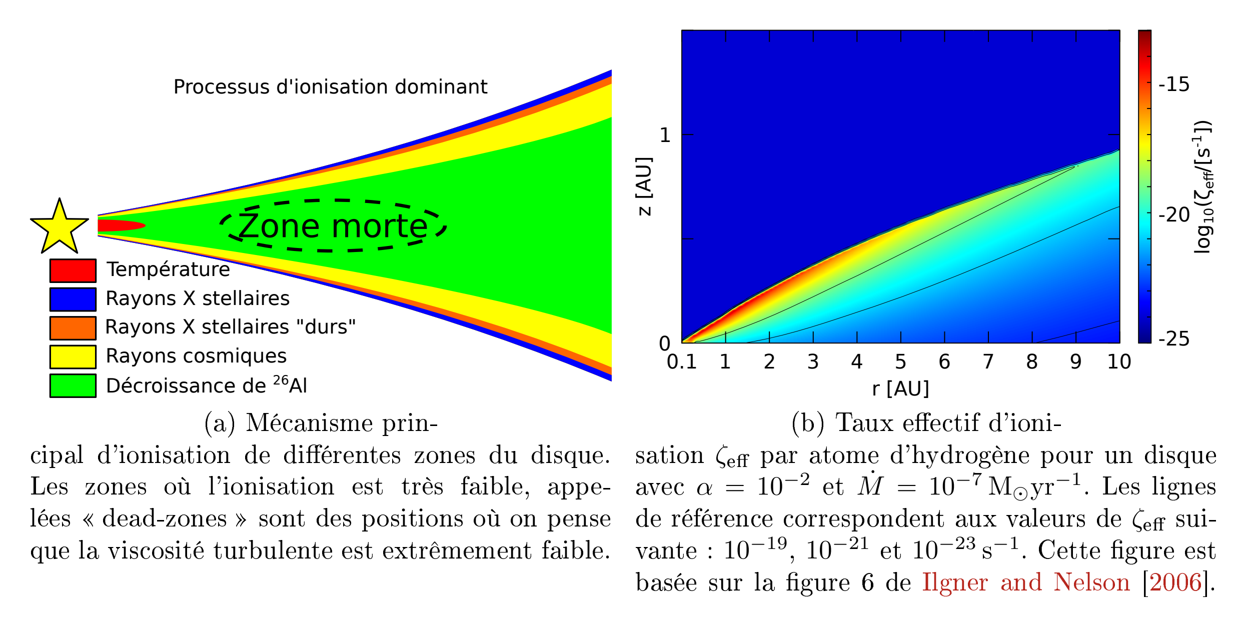
Ionisation et dead-zones

Pour qu'une instabilité magnéto rotationnelle ait lieu, c'est à dire qu'il y ait un couplage entre le champ magnétique et les mouvements du disque, il faut qu'une partie au moins du disque soit ionisé. Dans ces régions ionisées, on pourra alors avoir transport du moment angulaire via la viscosité turbulente.

Sans ionisation, il n'y a pas de couplage entre le champ magnétique et la matière, et donc pas de turbulence induite par ce même champ.

Or, comment ioniser ? [Figure 1.8a page suivante] représente les différents processus d'ionisation dominants en fonction de la zone du disque considérée. Mais si le taux d'ionisation décroit en fonction de la distance orbitale [Ilgner and Nelson, 2006] comme le montre [Figure 1.8b page suivante], il en va de même avec la densité de surface du disque. Il est donc probable que certaines zones du disques ne soient pas ionisés (en pourcentage du nombre total d'atomes disponibles), et donc que le transport du moment

angulaire s'y fasse peu ou pas du tout [Gammie, 1996]. Ces zones, appelées *dead zone*, sont donc des zones où la turbulence est faible ou inexistante, et où la viscosité et par conséquent beaucoup plus faible.



(a) Mécanisme principal d'ionisation de différentes zones du disque. Les zones où l'ionisation est très faible, appelées « dead-zones » sont des positions où on pense que la viscosité turbulente est extrêmement faible.

(b) Taux effectif d'ionisation $\zeta_{\rm eff}$ par atome d'hydrogène pour un disque avec $\alpha = 10^{-2}$ et $\dot{M} = 10^{-7}\,{\rm M}_\odot{\rm yr}^{-1}$. Les lignes de référence correspondent aux valeurs de $\zeta_{\rm eff}$ suivante : 10^{-19}, 10^{-21} et $10^{-23}\,{\rm s}^{-1}$. Cette figure est basée sur la figure 6 de Ilgner and Nelson [2006].

FIGURE 1.8 – Représentation de l'ionisation dans un disque protoplanétaire

On voit donc que les modèles de viscosité constante ou alpha sont incapables de rendre compte de la présence de ces zones de manière intrinsèque. Il est possible de modifier artificiellement les profils de viscosité pour faire apparaître de telles zones mais ça reste ad-hoc. Dans la suite, je n'ai pas modélisé de dead-zone même s'il est probable qu'elles aient un effet sur la migration, le modèle sans dead-zone n'est encore pas suffisamment bien compris pour que le rajout de ces zones sans ionisations soit pertinent.

1.2.5 La poussière

Le disque protplanétaire est principalement composé de gaz, hydrogène et hélium en majorité. Pourtant, même si la poussière ne représente qu'environ 1% de la masse du disque elle joue un rôle au moins aussi important que le gaz lui même.

À cause de la pression quasi inexistante dans le disque en raison des faibles densités, solide et gaz sont les seules phases existantes, il n'y a pas de liquides dans l'espace. La poussière représente la matière solide du disque, en grains plus ou moins fin, allant du nanomètre, micromètre, jusqu'à des tailles planétaires en fin de formation.

Cette poussière est un composé extrêmement complexe à manipuler. Elle contient différents composés solides en fonction de la température (à certaines températures et densité des composés se volatilisent et d'autres non). La ligne des glaces représente la distance à partir de laquelle de la glace d'eau apparait, augmentant de manière drastique la quantité de poussière dans le disque.

De plus, la poussière est aussi responsable de l'opacité du disque, c'est à dire sa capacité à laisser passer ou non la lumière. À travers l'opacité, la poussière a donc une

influence sur la température du disque qui se refroidit plus ou moins efficacement, et qui absorbe le rayonnement stellaire plus ou moins efficacement.

1.2.6 Opacité du disque

Un paramètre crucial des modèles de disques protoplanétaires est l'opacité du disque qui représente l'absorption du rayonnement incident par une cellule de gaz. Cette dernière dépend principalement de la composition chimique de la poussière sauf quand la température devient suffisamment importante pour que la totalité de la poussière se sublime, généralement au delà de 1500 K, l'opacité étant alors régie par les molécules du gaz.

En fonction de la température et de la pression, différentes espèces se condensent ou se subliment, modifiant les propriétés de la poussière (notamment la quantité de poussière disponible) et donc l'opacité.

L'opacité dépend de plus de la longueur d'onde, les raies d'absorptions n'étant pas uniformément réparties sur toute la gamme de longueur d'onde. Ce dernier paramètre est généralement intégré dans des modèles d'opacité. Citons notamment les opacités moyennes de Plank et de Rosseland, principales opacités utilisés dans les disques. Ce sont des quantités moyennées sur tout un spectre, rendant les opacités indépendantes de la longueur d'onde.

Dans le cas de l'opacité de la moyenne de Rosseland, on fait l'approximation que le disque est optiquement épais, de sorte qu'on peut négliger le flux total pour se concentrer uniquement sur la dérivée du flux. C'est à dire, en d'autres termes, que seul le flux provenant du gaz environnant arrive jusqu'à la zone considérée, le reste étant absorbé. Dû au coté optiquement épais du disque, on perd l'information sur le flux total, ce qui simplifie les calculs. L'opacité moyenne de Rosseland $\langle \kappa_R \rangle$ est alors définie comme :

$$\frac{1}{\langle \kappa_R \rangle} = \frac{1}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T}\,\mathrm{d}\nu} \int_0^\infty \frac{\frac{\partial B_\nu}{\partial T}}{\kappa_\nu}\,\mathrm{d}\nu \tag{1.44}$$

où B_ν et κ_ν sont l'intensité et l'opacité spécifique (dépendant de la fréquence).

À l'inverse, les opacités de Planck concernent les disques optiquement mince, où on ne peut plus considérer uniquement la dérivée du flux. La moyenne est alors effectuée sur l'intensité spécifique directement :

$$\frac{1}{\langle \kappa_P \rangle} = \frac{1}{\int_0^\infty B_\nu\,\mathrm{d}\nu} \int_0^\infty \frac{B_\nu}{\kappa_\nu}\,\mathrm{d}\nu \tag{1.45}$$

où $\int_0^\infty B_\nu\,\mathrm{d}\nu$ représente l'intensité totale, tandis que B_ν et κ_ν sont l'intensité et l'opacité spécifique (dépendant de la fréquence).

Dans la pratique, on fait bien souvent l'approximation que le disque est optiquement épais, ce qui est généralement vrai dans les parties internes du disque ($0.1 - 15$ AU), lieu de formation des planètes. Pour autant, le calcul des opacités est loin d'être trivial et plusieurs modèles proposent des tables d'opacités dont le détail des propriétés est différent. Le choix du modèle a donc des implications importantes sur le modèle de formation planétaire comme je le détaillerai dans la section [§ 4.3.5 page 86].

En formation planétaire, le modèle le plus utilisé est [Bell and Lin, 1994]. Mais dans mes études, j'ai utilisé en tout et pour tout 4 modèles différents [Bell and Lin, 1994, Zhu et al., 2009, Chambers, 2009, Huré, 2000]. À noter que [Bell and Lin, 1994, Zhu et al., 2009] sont des modèles qui proposent différents fonctions analytiques pour définir une opacité par morceaux. [Chambers, 2009] propose un modèle très simple à opacité constante $\kappa = 3$ tant que la température est inférieure à 1380 K, puis une simple loi de puissance, fonction uniquement de la température au delà. Enfin, le modèle dans [Huré, 2000] ne définit pas de fonctions par morceaux mais utilise simplement une table d'opacité fonction de la température et de la densité. L'avantage de ce type de méthode est qu'on ne rajoute pas d'incertitudes par des fits en loi de puissance, c'est donc principalement pour ça que j'ai choisi cette table d'opacité pour mon modèle standard.

1.2.7 Profil de densité de surface

Un point crucial dans la modélisation physique d'un disque protoplanétaire est son profil de densité de surface Σ. Ça signifie d'une part qu'on fait l'approximation d'un disque mince, et que toutes les quantités qu'on considère par la suite sont moyennées selon la direction verticale z.

Que l'on fasse évoluer la densité de surface ou non, on doit choisir un profil initial. Ce profil est généralement sous forme d'une loi de puissance de la forme :

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 \cdot \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-\alpha} \tag{1.46}$$

Un profil largement utilisé est celui de la Masse Minimale de la Nébuleuse Solaire [3] [Hayashi, 1981]. Dans cet article, le profil de densité est calculé à partir de la masse des planètes. La quantité de solide contenu dans les planètes est répartie dans des anneaux en lieu et place des planètes, puis à partir d'un rapport gaz sur poussière, le profil de densité de surface du gaz est calculé, puis approximé par une loi de puissance, ce qui donne :

$$\Sigma(R) = 1700 \left(\frac{R}{1\,\mathrm{AU}}\right)^{-3/2} \mathrm{g/cm^2} \tag{1.47}$$

La première chose, c'est que c'est une masse minimale, c'est à dire qu'on suppose que toute la masse de poussière présente dans le disque de gaz se retrouve dans la masse finale des planètes, ce qui est hautement improbable, que ce soit à cause notamment de l'accrétion sur l'étoile ou de la disparition d'embryons de planètes soit en tombant dans l'étoile, soit par éjection du système.

Ce profil est malgré tout une base de travail, vu qu'il est extrêmement difficile de déduire ces informations des observations des disques. Malgré tout, les études semblent montrer que l'on s'attend à un profil moins abrupt que $\Sigma \propto r^{-3/2}$, plus proche de $\Sigma \propto r^{-1}$ [Bell et al., 1997].

Mais on voit quand même que l'on a une grande liberté sur la densité de surface du disque, à la fois parce qu'on sait à ce jour peu de choses à ce sujet, mais aussi et surtout

3. MMSN : Minimum Mass Solar Nebulae

parce qu'au cours de son évolution, le disque de gaz va voir sa densité de surface varier énormément. En variant le profil, on étudie donc aussi différentes étapes de formation d'un même disque.

Le profil de densité de surface, que ce soit au travers de Σ_0 ou de l'indice α de la loi de puissance a une grande influence sur les autres paramètres du disques, notamment le profil de température, au travers du chauffage visqueux notamment.

Il est aussi crucial de garder à l'esprit que la loi de puissance n'est qu'un modèle, issu notamment des observations qui sondent les parties externes des disques, au delà de plusieurs dizaines d'unités astronomiques. Extrapoler ces lois de puissances jusqu'aux parties les plus interne est une très grande approximation qui a des conséquences importantes pour les planètes, dont le lieu de formation se situe vraisemblablement dans les parties internes.

1.2.8 Limites et approximations dues à la modélisation

Tout d'abord, le bord interne est une des parties les plus complexes d'un disque protoplanétaire. Ce bord interne correspond à des zones différentes pour le gaz ou pour la poussière. La poussière disparait quand la température du disque dépasse 1500K environ, température au delà de laquelle la partie réfractaire des grains se sublime.

Le gaz, quant à lui, ne se propage pas non plus jusqu'à la surface de l'étoile en raison du champ magnétique important autour des jeunes étoiles. Le bord interne est ainsi déterminé par le rayon de co-rotation de l'étoile, c'est à dire la distance à laquelle une particule en rotation képlerienne orbite à la vitesse de rotation de l'étoile. Le champ magnétique de l'étoile tournant à la vitesse de rotation de l'étoile, ce rayon de co-rotation correspond ainsi au rayon en dessous duquel le gaz est freiné par le champ magnétique et est rapidement accrété le long des lignes de champ.

En considérant un système « étoile + disque » isolé, il n'y a pas d'arrêt brutal de la distribution de matière au bord externe qui est donc plus une limitation numérique nécessaire aux simulations qu'autre chose. La réalité est représentée plus fidèlement par une décroissante continue de la matière, difficile à représenter tant pour le bord externe que pour la distribution azimutale du disque.

Généralement, on considère donc que la taille verticale du disque est égale à une échelle de hauteur (grandeur caractéristique de la décroissance exponentielle verticale de la densité de matière), tandis que la taille radiale du disque dépend de la physique que l'on considère. Dans mon cas j'ai souvent pris un bord externe à 100 AU.

Je vais ici essayer de récapituler les approximations qui ont été faites jusque là sur la physique des disques, et qui vont se retrouver implicitement dans tout code qui implémente les équations décrites ci-dessus :

1. On suppose que les disques évoluent de manière isolée. Les études suggèrent que les étoiles se forment majoritairement dans des amas (clusters) à l'intérieur desquels la plupart des étoiles font partie de systèmes binaires ou multiples [Duquennoy and Mayor, 1991]. Même si cette approximation permet la modélisation de l'évolution du disque, il est probable que des effets de voisinages aient des conséquences dans tout ou partie des systèmes stellaires.

2. On néglige l'autogravité du disque ($M_d \lesssim \frac{H}{R} M_\star$) en considérant que la période où ce n'est pas le cas est courte devant le temps de vie du disque, et que ce dernier tend rapidement vers une configuration où l'autogravité est négligeable.
3. On considère que le gaz est en rotation képlerienne $\Omega = \sqrt{\frac{GM_\star}{r^3}}$. Pour cela, on néglige la pression du gaz qui a tendance à rendre la rotation légèrement sous-képlerienne.
4. On considère qu'il n'y a pas de variation de la gravité dû à la variation de masse de l'étoile induite par l'accrétion. Ça entraîne alors $\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$.
5. Dans le calcul du chauffage visqueux, on néglige la vitesse azimuthale, la vitesse radiale ainsi que toutes les dérivées en φ compte tenu que le disque est axisymétrique.
6. On se place dans le cadre d'un disque optiquement épais quand on choisi d'utiliser des moyennes de Rosseland pour l'opacité. Si c'est physiquement cohérent avec les parties internes du disque, ça ne l'est parfois plus dans les parties externes, surtout si le disque est très étendu.
7. Le modèle d'opacité a une grande influence sur la physique du disque. En particulier, chaque modèle fait des hypothèses sur la métallicité, les propriétés de la poussière, notamment la taille des grains. Chacune de ces hypothèses joue sur l'opacité d'une manière qui est totalement masquée dans les équations ou tables qu'on utilise pour rendre compte de la dépendance de l'opacité en fonction de la température et de la densité.
8. On fait souvent l'approximation de la masse moléculaire moyenne μ est constante (et typiquement égale à $\mu = 2.35$). Or en fonction des transitions d'opacité, la quantité de poussière va brusquement varier, engendrant une variation de μ. Cette masse moléculaire moyenne a en particulier une importance dans le calcul de l'échelle de hauteur H du disque et la vitesse du son c_s.
9. Définir le profil de densité de surface du disque comme une loi de puissance reste une approximation. Ça l'est d'autant plus que le disque est étendu. Du reste, la masse du disque et l'indice de la loi de puissance sont peu contraints, donnant une grande liberté dans le profil de densité dont il faut tenir compte pour mettre en perspective les résultats que l'on obtient.
10. Le modèle choisi pour la viscosité, constante ou prescription alpha, néglige bien souvent la présence de « dead zone » où l'ionisation n'est pas suffisante pour que l'on puisse définir une viscosité turbulente. L'absence de ces zones dans un disque modélisé est bien entendu une approximation à des fins de simplifications, mais masque certaines propriétés intrinsèques des disques dont les conséquences sur la formation planétaire sont encore mal connues.
11. Une dernière approximation, et qui a des conséquences importantes pour l'opacité, le profil de température, la viscosité et par extension, toute la physique du disque, est le fait de considérer les propriétés de la poussière comme figées dans le temps. Au cours de la vie du disque, la poussière évolue. Sa distribution de taille change, la quantité totale de poussière est modifiée, notamment par l'accrétion. Et enfin, à mesure que la poussière se retrouve dans des embryons de planète de plus en plus gros, la quantité de poussière disponible sous la forme de petites particules diminue d'autant.

1.3 Interaction disque-planète

On ne peut étudier séparément le disque ou les planètes, c'est un système global, en interaction, qui évolue depuis la formation du disque (et les poussières qu'ils contient) jusqu'à la dissipation du disque (et la possible présence d'une ou plusieurs planètes).

Étant donné que j'ai implémenté les interactions disque-planète à partir de modèles calibrés sur des simulations hydrodynamiques, je ne vais pas redémontrer ici les formules analytiques, mais plutôt m'attacher à présenter, avec les mains, le principe de chacun des phénomènes physiques mis en jeux.

1.3.1 Migration des planètes de faible masse : type I

Ce type de migration ne concerne que les planètes de faible masse (de l'ordre de $10M_{\oplus}$) pour lesquelles l'interaction de marée entre la planète et le disque a une réponse linéaire, c'est à dire que le profil de densité surfacique n'est quasiment pas modifié par la planète. Ces planètes, qui ne creusent pas de sillon (gap) dans le disque de gaz, vont migrer vers l'intérieur. On appelle cette migration la *migration de type I*.

Couple du disque sur la planète

Un couple gravitationnel représente l'échange d'énergie associé à une force gravitationnelle. Le couplage gravitationnel entre les ondes de densité et la planète qui les crées abouti à un couple qui agit sur la planète :

$$\Gamma = -\iint_{\text{disc}} \left(\overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{\nabla}(\Phi_p)\right) \Sigma r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \tag{1.48}$$

⚠ À chaque fois qu'il sera mentionné « couple », celui-ci fera référence au couple *du* disque *sur* la planète.

Ainsi, si le couple est négatif (sous entendu du disque sur la planète), le disque va prendre de l'énergie à la planète qui va ainsi migrer plus proche de son étoile, vu que son énergie cinétique diminue.

Si le couple est positif, la planète migre vers l'extérieur, cette dernière prenant de l'énergie au disque.

Couple de Lindblad

La présence d'une planète dans un disque de gaz entraine la création d'ondes de densités aux *résonances de Lindblad* [Goldreich and Tremaine, 1979]. Le couplage gravitationnel entre les ondes de densité et la planète qui les crées abouti à un *couple* qui agit sur la planète.

Il est tout d'abord intéressant de remarquer l'origine des bras spiraux dans les galaxies. Ce sont essentiellement des phénomènes statistiques que l'on peut résumer en deux points :

1. Une onde de densité se forme par la présence de sur-densité locales comme des nuages de gaz géants [D'Onghia et al., 2013]. Une fois formée, il est possible que l'onde de densité s'auto-entretienne en modifiant les excentricités des éléments qui la composent [Binney and Tremaine, 2008].
2. L'onde ainsi créée n'est pas une onde matérielle rigide en rotation, mais une onde de densité statistique. Le bras spiral n'est ainsi pas constitué d'une population fixe d'étoile. Les étoiles constituant le bras spiral changent avec le temps, mais statistiquement, la position des étoiles dans la galaxie dessine une onde de densité où le nombre d'étoiles est plus grand.

[Figure 1.9] schématise l'apparition d'onde de densité. Dans le cas à gauche, des orbites concentriques parfaitement circulaires sont ajoutés. On ne voit rien de particulier. Par contre, dans le cas à droite, on choisi des orbites très légèrement excentriques. À chaque étape, on rajoute une orbite en agrandissant l'orbite précédente et en la tournant légèrement. On voit ainsi apparaître deux ondes de densités dans le disque simplement dues à l'orientation des orbites excentriques.

Ça signifie en particulier que la vitesse de rotation de l'onde de densité n'est pas liée à la vitesse de rotation des étoiles qui la composent. Ceci permet de résoudre le « winding problem » c'est à dire le fait que si l'onde de densité était rigide, elle s'enroulerait sur elle-même au bout de quelques orbites seulement, ce qui n'est pas le cas ici [Binney and Tremaine, 2008].

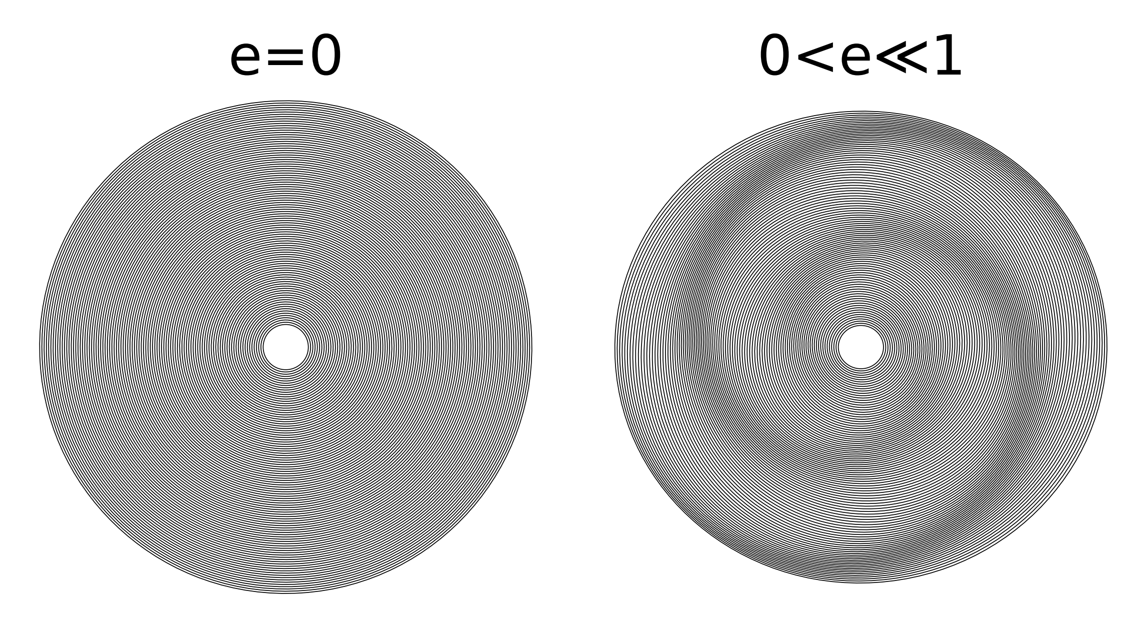


Figure 1.9 – Illustration de l'origine des bras spiraux dans une galaxie au travers de l'exitation cohérente de l'excentricité par les bras eux mêmes. Dans le cas « $e = 0$ », les orbites des étoiles, représentées par les traits noir sont des cercles parfaits. Dans le cas « $0 < e \ll 1$ », les orbites sont toutes très légèrement excentriques, et les arguments du périhélies légèrement décalés à mesure que les demi-grands axes augmentent.

Pour l'interaction entre une planète et un disque protoplanétaire, c'est exactement le même principe. Le potentiel de la planète excite les excentricités des éléments fluides voisins jusqu'à former une onde de densité autour de la planète. La différence principale est que le perturbateur est un potentiel gravitationnel tournant, ce qui modifie la forme des ondes de densité comme illustré [Figure 1.10 page ci-contre].

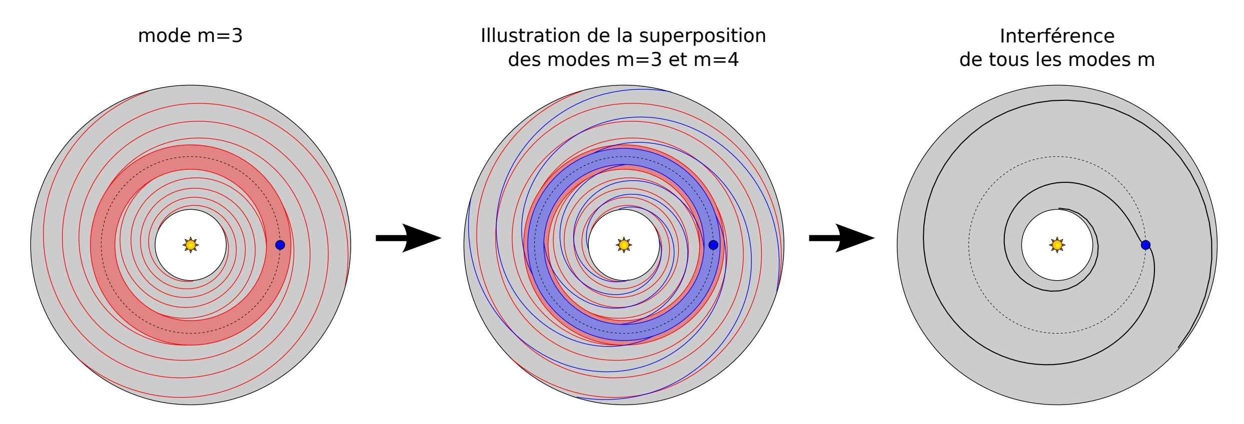


FIGURE 1.10 – Génération d'ondes de densité dans le disque protoplanétaire dû à la présence d'une planète. Chaque mode m émet m ondes de densité de part et d'autre de la position radiale de la planète. Un anneau interne aux positions du mode m est dénué de toute onde dû à ce même mode. Les interférences entre toutes les ondes de densités de tous les modes donne deux ondes de densités que l'on observe dans des simulations hydrodynamique. Les positions successives des interférences constructives sont données par [Ogilvie and Lubow, 2002, eq. (13) et (24)]

Le potentiel gravitationnel de la planète peut se décomposer en série de Fourier où chaque mode m (entier) a une dépendance sinusoïdale en azimut et possède m maxima et m minima.

Pour chaque mode m du potentiel gravitationnel de la planète, on définit deux résonances, une résonance interne (ILR : Inner Lindblad Resonance) et une résonance externe (OLR : Outer Lindblad Resonance) associées aux positions suivantes dans le cas d'un disque froid ($H/R \ll 1$; Ward [1997]) :

$$r_{OLR}(m) = \left(\frac{m+1}{m}\right)^{2/3} r_p \tag{1.49a}$$

$$r_{ILR}(m) = \left(\frac{m-1}{m}\right)^{2/3} r_p \tag{1.49b}$$

Pour un mode m donnée, à partir des anneaux de rayon $r_{ILR}(m)$ et $r_{OLR}(m)$ vont être lancées m ondes de densités.

Dans le cas des bras spiraux dans une galaxie, c'est principalement un mode $m = 2$ qui propage une onde spirale de part et d'autre d'une barre centrale source des ondes de densité. Dans le cas d'une planète dans un disque, des ondes de densité sont lancées pour chaque mode m.

Par interférence constructive [Ogilvie and Lubow, 2002], la somme de toutes les ondes de densités émises par tous les modes du potentiel gravitationnel vont résulter en la formation d'une onde de densité résultante [FIGURE 1.10].

Il est important de remarquer que la position de la résonance externe d'ordre m est systématiquement plus proche que la résonance interne associée. Ainsi, en sommant sur tous les modes, on arrive à la conclusion que le couple total externe l'emporte toujours sur le couple total interne [Ward, 1997].

Ainsi, le couple de Lindblad est généralement négatif pour des modèles typiques de disques protoplanétaires [Ward, 1997].

La résolution numérique des équations linéarisées permet de trouver une formule analytique pour le couple de Lindblad Γ_L. Dû à la résolution numérique qui doit s'affranchir de la divergence du potentiel gravitationnel en $r = r_0$, cette formule introduit une longueur de lissage permettant de s'affranchir de la singularité du noyau du Green du potentiel gravitationnel [Paardekooper et al., 2010, eq. (14)] :

$$\gamma\Gamma_L/\Gamma_0 = -(2.5 + 1.7\beta - 0.1d)\left(\frac{0.4}{b/h}\right)^{0.71} \tag{1.50}$$

où γ est l'indice adiabatique, et β et d sont les exposants des lois de puissance pour les profils de température et de densité de surface.

Le couple est ici exprimé en unité de Γ_0, couple de référence défini par :

$$\Gamma_0 = \left(\frac{q}{h}\right)^2 \Sigma_p {r_p}^4 {\Omega_p}^2 \tag{1.51}$$

Notons aussi que le processus physique du transport du moment angulaire de la planète est réalisé par l'onde de densité. Le moment angulaire est emporté par l'onde de densité qui l'échange avec le gaz environnant à mesure que ce dernière amorti et dissipe l'onde.

Couple co-orbital ou de corotation

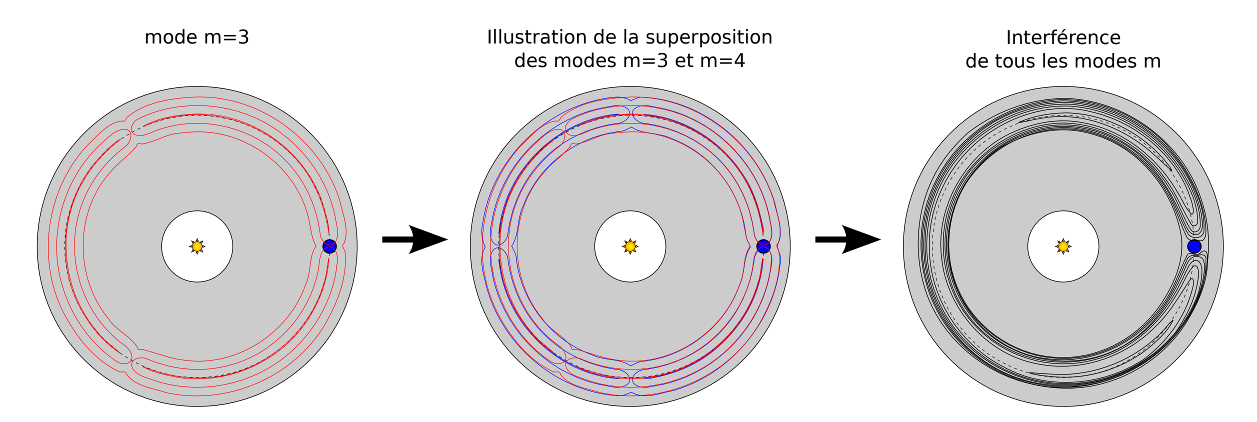


FIGURE 1.11 – À partir de la décomposition en série de Fourier du potentiel gravitationnel de la planète, chaque mode m a pour conséquence m zones de libration dans la zone de corotation avec la planète. Les interférences entre l'infinité de modes m fait apparaître des orbites fer-à-cheval (« horseshoe orbits ») dans la référentiel tournant avec la planète. La zone de corotation a ici été exagérée pour plus de lisibilité.

De la même manière que précédemment pour le couple de Lindblad, on peut repartir de la décomposition en série de Fourier du potentiel gravitationnel de la planète. Pour chaque mode m de la décomposition, on voit apparaître m zones de libration, centrées sur le rayon de la planète, et réparties en azimut. Figure 1.11 représente le mode $m = 3$, puis une juxtaposition de mode et finalement le résultat des interférences constructives entre tous les modes m de la décomposition.

Le couple de corotation provient des échanges gravitationnels que va avoir une particule fluide en co-orbite avec une planète. Il existe deux types de couples, issus du gradient de deux quantités physiques distinctes, la vorticité spécifique (vorticité divisée par la densité de surface) appelée parfois vortensité et l'entropie.

Chacun de ces deux couples possède une partie qui peut saturer en fonction des conditions physiques.

Pour illustrer le principe de la saturation, et sans considérer un couple en particulier, il convient de définir certains temps caractéristiques afin de comprendre l'origine de ce couple non saturé, et pourquoi ce dernier peut saturer. Figure 1.12 représente schématiquement les 3 temps principaux mis en jeux.

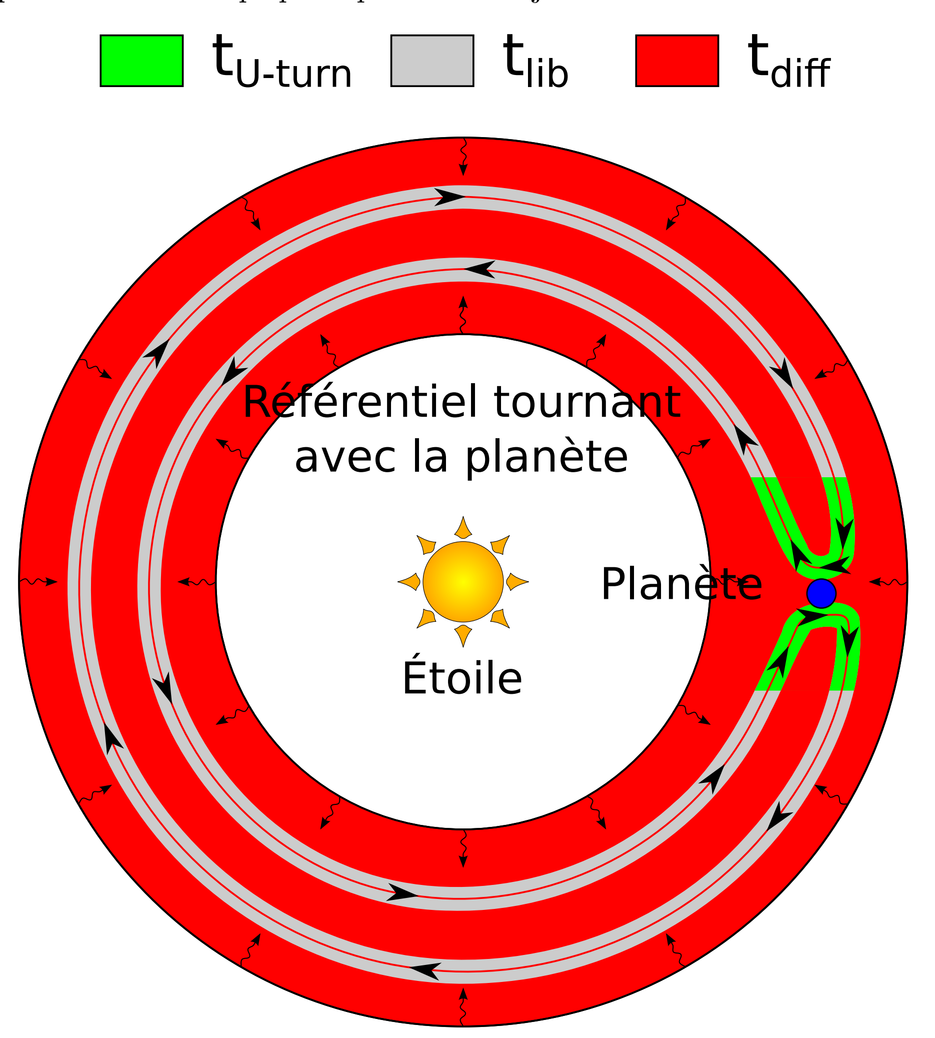


FIGURE 1.12 – Dans le référentiel tournant avec la planète (qui est donc fixe dans ce repère), représentation d'une orbite de corotation ainsi que des différents temps caractéristiques mis en jeux. $t_{\rm lib}$ est le temps mis par un élément fluide pour effectuer une orbite de corotation (temps qui peut être égal à 130 fois la période orbitale de la planète). $t_{\rm U\text{-}turn}$ est le temps mis par un élément fluide pour effectuer un demi tour devant la planète. $t_{\rm diff}$ peut être suivant le cas le temps radiatif $t_{\rm rad}$ ou le temps visqueux $t_{\rm vis}$ nécessaire pour homogénéiser les propriétés thermodynamiques de l'élément fluide avec son environnement.

On définit tout d'abord $t_{\rm lib}$ comme le temps mis par un élément fluide pour effectuer une co-orbite complète dans la zone de fer-à-cheval. Ceci dépend de la distance de l'élément fluide au rayon de corotation. Mais le temps de libration le plus court est

obtenu à la distance x_s de la corotation, et vaut [Baruteau and Masset, 2008, eq. (52)] :

$$t_{\mathrm{lib}} = \frac{4\pi}{x_s \left|\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}\right|} = \frac{8\pi r_p}{3\Omega_p x_s} \tag{1.52}$$

où x_s est la demi-largeur de la zone de fer-à-cheval (« half-width of the horseshoe region ») [Paardekooper et al., 2010, eq. (44)] :

$$x_s = \frac{1.1}{\gamma^{1/4}} \left(\frac{0.4}{b/h}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{q}{h}} \tag{1.53}$$

Dans le cas d'une planète de $20\,\mathrm{M}_\oplus$ à 1 AU dans un disque avec $h = 0.05$ et $M_\star = 1M_\odot$, ce temps de libration vaut $t_{\mathrm{lib}} \sim 38p_{\mathrm{orbital}}$.

Le temps $t_{\text{U-turn}}$ représente quant à lui la durée nécessaire à un élément fluide pour effectuer un demi tour devant la planète, c'est à dire pour parcourir la zone de longueur $2x_s$ [4] devant la planète. Il est définit par [Baruteau and Masset, 2008, eq. (64)]

$$t_{\text{U-turn}} \simeq \frac{4}{\Omega_p} \left[\frac{H(r_p)}{R_H}\right]^{3/2} \tag{1.54}$$

où $R_H = r_p(q/3)^{1/3}$ est le rayon de Hill de la planète. Dans le cas d'une planète de $20\,\mathrm{M}_\oplus$ à 1 AU dans un disque avec $h = 0.05$ et $M_\star = 1M_\odot$, ce temps vaut $t_{\text{U-turn}} \sim 1.6p_{\mathrm{orbital}}$.

Un troisième est dernier temps t_{diff} rentre en jeu, c'est le temps de diffusion. Selon le processus physique mis en jeu, ce temps peut être t_{rad} ou t_{visc}.

t_{rad} représente le temps de diffusion par refroidissement radiatif. Ce temps est plus long quand on se rapproche de l'étoile car le rayonnement est plus rapidement ré-absorbé. Le temps radiatif au travers de la zone de corotation est de l'ordre de :

$$t_{\mathrm{rad}} = \frac{{x_s}^2}{\chi} \tag{1.55}$$

où x_s est la demi-largeur de la zone de corotation et χ est la diffusivité thermique.

t_{visc} représente la diffusion d'une quantité physique par la viscosité. Ce temps est plus court quand on se rapproche de l'étoile. Le temps visqueux à la zone de corotation t_{visc} est de l'ordre de [Masset, 2001, 2002, Ogilvie and Lubow, 2003]

$$\tau_\nu \sim \frac{{x_s}^2}{\nu} \tag{1.56}$$

Quand la grandeur physique considérée est la vortensité (ou vorticité spécifique), seul t_{visc} est à prendre en compte. Quand c'est l'entropie, les deux temps t_{visc} et t_{rad} sont importants. Figure 1.12 page précédente récapitule les temps mis en jeux et à quoi ils correspondent.

Pour que le couple de corotation soit non saturé, on doit satisfaire aux inéquations suivantes [Baruteau and Masset, 2013, eq. (31)] :

$$t_{\text{U-turn}} < t_{\mathrm{diff}} < \frac{t_{\mathrm{lib}}}{2} \tag{1.57}$$

4. x_s est la demi-largeur de la zone de fer-à-cheval (« half-width of the horseshoe region »)

$t_{\text{U-turn}}$ est le temps nécessaire pour faire le demi tour devant la planète (en gros, pour traverser la zone égale à $2x_s$). t_{lib} est le temps de libration, c'est à dire le temps mis par une particule fluide pour faire le tour de la zone en fer-à-cheval. t_{diff} quant à lui est le temps de diffusion de la quantité physique considérée. Suivant les cas, il peut y avoir plusieurs temps de diffusion qui sont important, auquel cas les inégalités doivent être satisfaites pour tous les temps de diffusions mis en jeux.

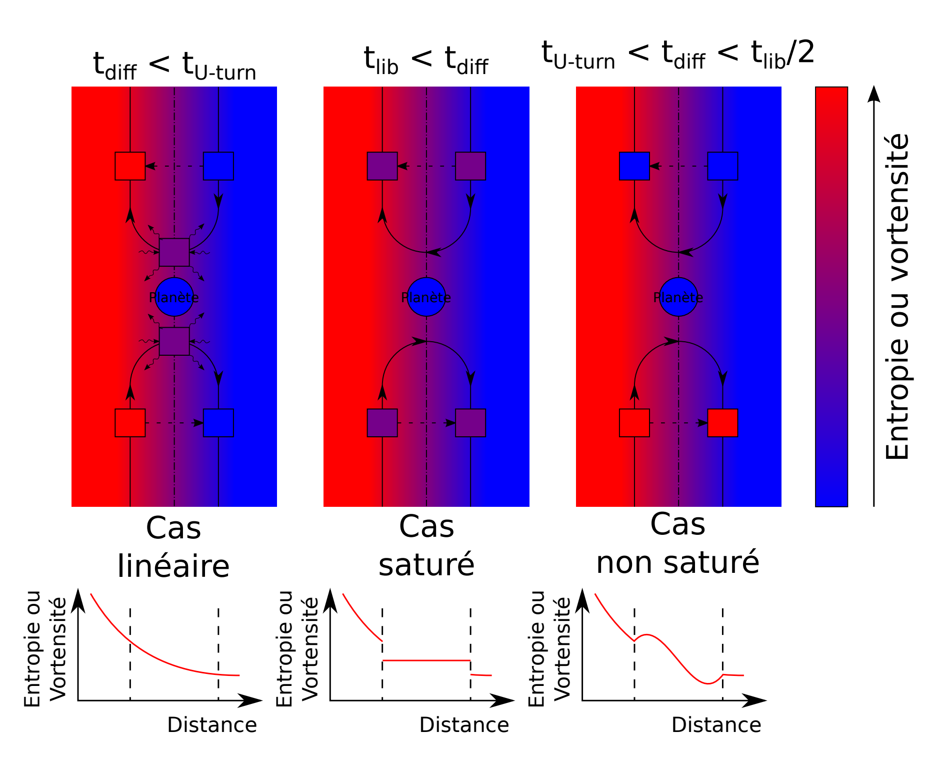


FIGURE 1.13 – Dans le référentiel tournant avec la planète, représentation du mécanisme général à l'origine du couple de corotation. Lorsque les temps de diffusion t_{diff} sont plus grande que le temps de libration t_{lib}, le couple de corotation sature car le gradient de vortensité/entropie au travers de la région fer-à-cheval tend à s'aplatir. Ce dernier est restauré quand les temps de diffusion t_{diff} sont plus courts que le temps de libration t_{lib}. Dans ce cas, la valeur optimale du couple de corotation est obtenue lorsque les temps de diffusion t_{diff} sont de l'ordre de la moitié du temps de libration $t_{\text{lib}}/2$. Dans la limite où les temps de diffusion t_{diff} sont plus courts que le temps de demi-tour $t_{\text{U-turn}}$, l'amplitude du couple de corotation décroit pour atteindre la valeur prédite par une analyse linéaire.

Figure 1.13 illustre les trois cas possibles en fonction des commensurabilités entre les différents temps caractéristiques mis en jeux.

L'idée générale afin d'éviter la saturation, c'est qu'on doit restaurer le gradient d'entropie / de vortensité au travers de la zone fer-à-cheval. Il faut donc que les processus diffusifs soient suffisamment efficace pour qu'en arrivant à la région de « U-turn » de l'autre coté, l'élément fluide ait pu équilibrer ses conditions physiques avec le milieu environnant. Cette condition est illustrée par l'inégalité suivante :

$$t_{\text{diff}} < \frac{t_{\text{lib}}}{2} \tag{1.58}$$

Mais il faut de plus que la diffusion ne soit pas trop efficace, sous peine que la valeur du couple de corotation diminue pour atteindre la valeur prédite par une analyse linéaire.

Ceci donne alors la deuxième inéquation :

$$t_{\text{U-turn}} < t_{\text{diff}} \tag{1.59}$$

De la même manière que pour le couple de Lindblad, la résolution numérique des équations nous permet d'avoir des expressions analytiques pour les couples de corotation.

Il y a d'une part les couples soumis à saturation [Paardekooper et al., 2010, eq. (45)] :

$$\gamma\Gamma_{\text{c,hs,baro}}/\Gamma_0 = 1.1\left(\frac{3}{2}-d\right)\left(\frac{0.4}{b/h}\right) \tag{1.60a}$$

$$\gamma\Gamma_{\text{c,hs,ent}}/\Gamma_0 = \frac{\xi}{\gamma}\left(10.1\sqrt{\frac{0.4}{b/h}}-2.2\right)\left(\frac{0.4}{b/h}\right) \tag{1.60b}$$

et les couples non soumis à saturation, dits linéaires [Paardekooper et al., 2010, eq. (17)] :

$$\gamma\Gamma_{\text{c,lin,baro}}/\Gamma_0 = 0.7\left(\frac{3}{2}-d\right)\left(\frac{0.4}{b/h}\right)^{1.26} \tag{1.61a}$$

$$\gamma\Gamma_{\text{c,lin,ent}}/\Gamma_0 = \xi\left[2.2\left(\frac{0.4}{b/h}\right)^{0.71}-\frac{1.4}{\gamma}\left(\frac{0.4}{b/h}\right)^{1.26}\right] \tag{1.61b}$$

d et ξ sont respectivement les exposants des lois de puissance pour les profils 1D de densité de surface et d'entropie.

Dans la pratique, ce couple peut être positif (migration vers l'extérieur) ou négatif (migration vers l'intérieur) en fonction des variations des quantités physiques par rapport à leur valeur nominales.

> **Remarque** : Si la planète creuse un *sillon* (*gap*) le long de son orbite, alors il n'y a pas de couple co-orbital étant donné que le gaz est déplété.
>
> S'il n'y a pas de diffusion (temps de diffusion t_{diff} très long), alors le couple va saturer très rapidement, typiquement quelques dizaines d'orbites.

Modélisation dans le code N-corps

Les couples de Lindblad et de Corotation ont été intégrés aux simulations numériques en utilisant le modèle de Paardekooper et al. [2011]. Plus de détails sur l'implémentation de ces formules et le modèle de disque utilisé dans la section [§ 2 page 47].

1.3.2 Migration des planètes massives : type II

Par massive, on entend une planète qui va induire des modifications importantes du profil de densité du disque. L'approximation du régime linéaire n'est alors plus valable.

Je présente ici très succinctement ce type de migration que je n'ai pas considéré tout au long de ma thèse. Je me place dans le régime linéaire et me suis concentré sur les cœurs de planète géante et les planètes telluriques. J'ai donc négligé tous les effets non linéaires dû aux grandes masses, et en particulier la création d'un sillon par les planètes.

Quand une planète dans un disque devient suffisamment massive, la réponse du disque n'est plus linéaire, et des ondes de densité induites par la planète forment des chocs non loin de là où elles sont émises. La répulsion entre le disque et la planète devient si forte qu'une cavité annulaire se forme autour de l'orbite de la planète, creusant le disque de gaz [Lin and Papaloizou, 1986].

Une fois que la cavité est formée, la planète est dite en migration de *type II* : son orbite agit alors essentiellement comme une barrière entre les deux parties du disque de gaz, *interne* et *externe*. Du gaz peut parfois sauter le gap, ou être accrété par la planète mais cette dernière voit son mouvement régit par le disque de gaz, se retrouvant entraînée par la migration de celui-ci.

Quand la planète creuse un sillon et que sa masse est inférieure ou de l'ordre de la masse locale du disque ($M_p \lesssim M_{\text{d,loc}}$ avec lequel elle interagit, alors le temps de migration de la planète est contrôlé par le *temps visqueux* du disque, car cette dernière se comporte comme une particule de ce disque [Nelson et al., 2000].

1.3.3 L'amortissement de l'excentricité et de l'inclinaison

Une planète sur une orbite non circulaire $e \neq 0$ génère des ondes supplémentaires à cause de son excentricité. De même, une orbite légèrement inclinée induit des ondes à cause de l'inclinaison I de la planète.

Des calculs analytiques sur les équations linéarisées (valables quand e et I sont faibles $e, i \ll H/R$) montrent que les ondes dues à l'excentricité ou l'inclinaison ont tendance à amortir l'élément orbital qui est à leur origine. [Tanaka and Ward, 2004, eqs. (45), (47)] trouvent un amortissement exponentiel dont les temps caractéristiques sont :

$$\frac{\bar{\dot{e}}}{e} = -\frac{0.780}{t_{\text{wave}}} \tag{1.62a}$$

$$\frac{\bar{\dot{I}}}{I} = -\frac{0.544}{t_{\text{wave}}} \tag{1.62b}$$

où le temps caractéristique de l'évolution orbitale t_{wave} est donné par [Tanaka and Ward, 2004, eq. (49)] :

$$t_{\text{wave}} = \frac{M_\star}{M_p}\frac{M_\star}{\Sigma_p a^2}\left(\frac{H}{R}\right)^4 {\Omega_p}^{-1} \tag{1.63}$$

Le temps caractéristique d'amortissement pour l'excentricité et l'inclinaison est similaire et de l'ordre de [Tanaka and Ward, 2004] :

$$\tau_e \sim \tau_I \sim h^2 \tau_{\text{mig}} \tag{1.64}$$

Des simulations hydrodynamiques montrent que le même phénomène d'amortissement se produit pour des valeurs plus grandes de e et I, tout en étant dans un régime différent que celui à faible valeurs ($e, i \ll H/R$) [Cresswell et al., 2007]. On explique cela pour l'inclinaison par le fait qu'à grande inclinaison, la planète peut sortir du disque est ressentir un amortissement réduit. Pour l'excentricité quant à elle, on invoque le fait que durant son orbite la planète va voir sa vitesse varier par rapport à celle du disque de gaz [Papaloizou and Larwood, 2000].

1.3.4 L'accrétion du gaz

Dans le modèle d'*accrétion de cœur*, les planètes géantes sont d'abord des cœurs rocheux qui grossissent jusqu'à atteindre une masse critique de l'ordre de $15M_\oplus$. Une fois cette masse atteinte, le cœur commence à accréter rapidement du gaz jusqu'à former une géante gazeuse.

Ceci implique que la formation des planètes géantes doive se passer avant que le disque de gaz ne se dissipe (ce qui intervient au bout de quelques millions d'années).

Les noyaux de ces planètes sont supposés se former au delà de la ligne des glaces (limite radiale virtuelle au delà de laquelle on peut trouver de l'eau sous forme solide ; autour de 4 UA). En effet, au delà de cette limite, la quantité de matière solide augmente, et donc le taux d'accrétion augmente aussi.

⚠ La formation des embryons de planètes géantes n'est toujours pas clair. On ne sait pas vraiment s'il y a une zone privilégiée ou non, la limite virtuelle de la ligne des glaces pourrait ne pas être valable, la glace ne rajoutant qu'environ 50% de masse en plus.

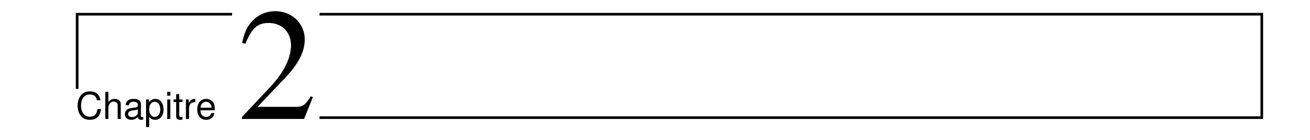
À noter qu'il n'y a pas de pression et donc pas de liquide dans l'espace, juste du gaz ou du solide.

Pour une simulation donnée, si on augmente le taux d'accrétion de la planète, celle-ci sera plus massive, et aura donc une inertie plus grande. Elle mettra donc plus de temps à migrer par migration Type II car son inertie s'y opposera. D'un autre coté, si la planète n'a pas encore créé de gap, la migration de Type I est plus rapide à mesure que la masse augmente.

1.3.5 Récapitulatif des interactions dans le code N-corps

Numériquement, le couple de migration type I est pris en compte en utilisant les formules semi-analytiques développées par Paardekooper et al. [2011].

L'amortissement de l'inclinaison et de l'excentricité quant à elles sont modélisées via les formules de Cresswell and Nelson [2008].



Le Code N-Corps

Sommaire

Afin d'étudier la formation planétaire et les interactions avec le disque de gaz, j'ai utilisé un code de simulation N-corps, qui permet de regarder l'évolution d'un nombre arbitraire de corps orbitant autour d'un astre central [Chambers, 1999].

Ce choix est apparu naturellement. Au début de ma thèse j'ai fait quelques simulations hydrodynamiques avec le code Genesis développé par Arnaud Pierens. J'ai rapidement constaté que ce genre de simulations, bien que modélisant de manière poussée le disque, ne permettait pas d'étudier de manière approfondie la dynamique planétaire. Le temps de calcul nécessaire pour une simulation limite en effet grandement le nombre de corps ainsi que la durée d'intégration. J'ai donc souhaité me tourner vers un code N-corps, afin de privilégier la dynamique planétaire, et de modifier ce programme afin d'y inclure les effets d'un disque de gaz sur la dynamique planétaire.

J'ai ainsi gagné en temps de calcul, et j'ai ouvert un vaste champ d'investigation sur les paramètres du disques, le nombre de corps en interaction, me permettant de faire des systèmes planétaires très divers, parfois avoir plusieurs centaines d'embryons pour plusieurs millions d'années, chose impossible dans les simulations hydrodynamiques du début de ma thèse où 20 corps pendant quelques dizaines de milliers d'années était un maximum.

Ce choix a bien entendu introduit son lot d'incertitudes et d'approximations qui sont discutés dans la partie [§ 5 page 94]. La présente section a pour but de présenter le code N-corps que j'ai utilisé ainsi que les différents effets du disque que j'ai modélisé. J'ai avant tout souhaité présenter les parties qui ont des conséquences sur la physique du disque, que ce soit en terme de choix d'un modèle particulier, ou de limitations numériques qu'il est bien de garder à l'esprit quand on interprète les résultats.

2.1 Présentation de mercury

Le code N-corps choisi est le code **mercury** [Chambers, 1999]. Ce code offre la possibilité de choisir un algorithme parmi 5 différents (BS, BS2, RADAU, MVS et HYBRID), ayant des propriétés diverses. Dans le cadre de ma thèse, je n'ai utilisé que l'algorithme HYBRID, qui utilise l'algorithme MVS la plupart du temps, mais change pour l'algorithme BS2 lors de rencontres proches. Il est possible de déterminer à quel moment on considère qu'une rencontre est "proche" dans le fichier de paramètre de programme, j'ai laissé le paramètre par défaut.

La raison de ce changement est assez simple. MVS est un algorithme symplectique, c'est à dire à pas de temps constant, dans lequel on défini un hamiltonien que l'on résout pour faire évoluer les orbites. La conservation de l'énergie est moins bonne que pour un algorithme à pas de temps adaptatif, mais le point très important est que cette conservation de l'énergie est bien meilleure au cours du temps. C'est à dire que là où les algorithmes tels que BS, BS2 et RADAU verront leur erreur sur l'énergie augmenter au cours du temps, les algorithmes symplectiques vont eux voir leur erreur rester plus ou moins constante au cours du temps.

Dans le cadre de mes simulations, j'ai accordé une importance limitée aux variations d'énergie, étant donné que les couples que l'on rajoute pour simuler la présence du disque de gaz font que l'énergie n'est pas conservée pour une planète donnée. Cependant, il est

important de bien résoudre les orbites et c'est ce point qui est le plus crucial ici. En effet, quelques tests ont permis de contraindre le pas de temps minimal qu'il est nécessaire d'avoir en fonction de la distance orbitale d'une planète. La contrainte de pas de temps dans mes simulations vient donc d'une distance minimale en dessous de laquelle les orbites ne sont pas correctement calculées. Cette limite, afin d'éviter tout problème, est choisie pour être en dessous du bords interne du disque de gaz que je défini.

2.2 Algorithmes d'intégration

Dans mercury, il y a cinq algorithmes différents à notre disposition :

- MVS [Wisdom and Holman, 1991] : un code symplectique [1], c'est-à-dire qui conserve l'énergie au cours du temps et dont le pas de temps est fixe (c'est le seul à avoir un pas de temps fixe)
- BS [Stoer and Burlisch, 1980] : un algorithme à pas de temps variable, réputé robuste et plutôt long à tourner.
- BS2 [Press et al., 1992] : Basé sur BS, il présente l'inconvénient de ne pas fonctionner pour les systèmes non conservatifs. Il est censé être deux fois plus rapide que BS.
- RADAU [Everhart, 1985] : Ne fonctionne pas bien pour les rencontres proches et les orbites très excentriques. Est censé être deux à trois fois plus rapide que BS.
- HYBRID [Chambers, 1999] : Ce code utilise MVS en temps normal, puis lors d'une rencontre proche, utilise BS2 afin de résoudre correctement les orbites.

Il y a donc principalement deux catégories : les intégrateurs symplectiques où le paramètre fixe est le pas de temps ($h = \mathrm{c}^{\mathrm{te}}$) et les intégrateurs N-corps où le paramètre est la précision en terme de conservation d'énergie d'un pas de temps à l'autre (le pas de temps n'étant pas fixe). Ici, seuls MVS et HYBRID utilisent une partie symplectique alors que BS, BS2 et RADAU sont purement N-corps.

On défini le Hamiltonien H de notre problème N-corps comme étant la somme des énergies cinétiques et potentielles de chaque corps :

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{{p_i}^2}{2m_i} - G \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \tag{2.1}$$

où m_i est la masse du corps i, p_i son impulsion et r_{ij} la séparation entre les corps i et j.

Un intégrateur symplectique est un intégrateur qui au lieu d'appliquer directement le hamiltonien H sur le système, va séparer ce dernier en deux (ou plusieurs parties) et appliquer ces sous-hamiltoniens successivement. Un intégrateur symplectique résoud donc le problème de manière approchée en négligeant les termes croisés des sous-hamiltoniens.

Afin de minimiser l'erreur dû à cette approximation, il faut choisir judicieusement la séparation du hamiltonien afin d'avoir une partie dominante par rapport à l'autre.

Par définition, un algorithme symplectique conserve l'énergie au cours du temps, même si l'énergie fluctue au cours du temps autour d'une valeur moyenne.

1. Basiquement, un code symplectique est un code qui conserve parfaitement l'énergie de par sa définition en terme d'hamiltoniens.

Les intégrateurs symplectiques ont deux avantages importants sur les intégrateurs classiques :

1. Les fluctuations « instantanées » de l'énergie dues à un algorithme symplectiques sont plus grandes que celles d'un algorithme N-corps, mais à la différence de ces derniers, l'erreur ne croit pas au cours du temps [FIGURE 2.1].
2. Ils sont moins couteux en temps de calcul, en particulier quand la majeure partie de la masse est contenue dans un seul corps (bien adapté pour l'étude d'un système planétaire autour d'une étoile donc).

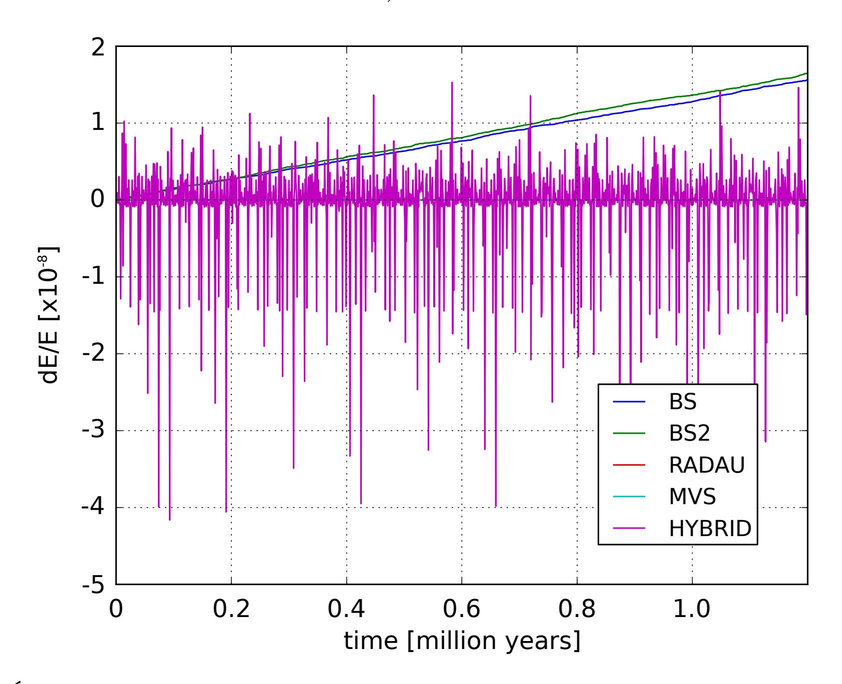


FIGURE 2.1 – Évolution de l'erreur au cours du temps pour une simulation contenant trois planètes d'une masse terrestre chacune, cette simulation étant lancée successivement avec chacun des algorithmes disponibles dans **Mercury**.

Les algorithmes symplectiques ont cependant un inconvénient. Le pas de temps fixe d'un intégrateur symplectique ne permet pas de résoudre correctement les rencontres proches entre les corps du système. Chaque fois que le pas de temps d'un algorithme symplectique est changé, son hamiltonien change aussi, et entraine une variation d'énergie du système (dont l'énergie va osciller autour d'une nouvelle valeur moyenne).

Nous cherchons maintenant à déterminer l'algorithme le plus approprié pour notre étude. Nous souhaitons faire évoluer un système avec plusieurs dizaines d'embryons planétaire pour plusieurs millions d'années, le système n'étant pas conservatif à cause des divers effets du disque que nous implémentons.

Nous souhaitons résoudre correctement les orbites, mais avoir un temps de calcul raisonnable.

La première contrainte est la dissipation. En effet, notre système n'est pas conservatif. Tous les algorithmes N-corps disponibles (BS, BS2 et RADAU) ne fonctionnent donc pas correctement, ces derniers réclament un pas de temps extrêmement faible qui n'est pas représentatif de la précision demandée pour l'intégration N-corps, la variation d'énergie numérique étant masquée par la variation d'énergie induite par les effets du disque.

Il nous reste les algorithmes MVS et HYBRID. La deuxième contrainte, ce sont les rencontres proches et les collisions. Nous savons qu'un algorithme symplectique ne les traite pas correctement, et si c'est une erreur négligeable dans le cas où il y en a peu, ça ne l'est absolument plus dans notre cas, le nombre de rencontre proche pouvant être très important, notamment dans la phrase d'accrétion en début de simulation. L'algorithme MVS ne parait donc pas adapté contrairement à HYBRID qui a été construit pour être à la fois symplectique et gérer correctement les rencontres proches moyennant une erreur plus importante lors du changement d'algorithme.

L'algorithme HYBRID est l'algorithme MVS, à pas de temps constant la majorité du temps. Il a donc les avantages d'un algorithme symplectique, à savoir la conservation de l'énergie et la rapidité d'exécution. Lors de rencontres proches (déterminées par une distance minimale d'approche entre deux corps, soit en rayon de Hill, soit en nombre de pas de temps), l'algorithme BS2 est utilisé, le pas de temps devient donc variable afin de résoudre correctement la rencontre et éventuellement la collision. Une fois fini, c'est de nouveau MVS qui prend le relai.

Dans notre cas, plusieurs approximations sont faites :

- L'algorithme BS2 ne fonctionne que pour les systèmes conservatifs. On suppose que la variation d'énergie induite par la migration est totalement négligeable pendant le bref labs de temps de la rencontre proche
- Le nombre de collisions est suffisamment faible pour que les propriétés symplectiques de l'intégrateur soient conservées. On suppose de plus que les variations d'énergies induites par ce biais sont négligeables devant la dissipation induite par le disque (qui est de l'ordre de l'énergie initiale du système planétaire)

Il reste alors une chose à déterminer, c'est le pas de temps fixe que l'on doit choisir afin de résoudre correctement les orbites. Pour cela on se place dans un cas simplifié, sans les effets du disque, et on souhaite savoir la condition sur le pas de temps afin que l'orbite soit correctement calculée.

2.3 Mode d'emploi du code N-corps modifié

À part la première section qui donne quelques détails techniques, le but de cette partie est de présenter les différentes options du code modifié. Ces options sont lues à partir d'un fichier commun **disk.in**. Si une option n'est pas présente, la valeur par défaut sera lue à partir du code. Le fichier **disk.out** récapitule toutes les valeurs de toutes les options et paramètres importants du code.

> **Remarque :** Il est possible de mettre des commentaires dans le fichier **disk.in**, que ce soit pour commenter une ligne entière, ou pour mettre en fin de ligne après un paramètre, à l'aide du caractère « ! » exactement comme en Fortran90.

2.3.1 Note technique

Le code est en grande partie le code mercury Chambers [1999]. Les effets du disque ont été inclus dans la partie **mfo_user** prévue pour inclure des effets propre à chaque utilisateur.

Pour autant, le code a été conçu de manière modulaire en portant une attention particulière au temps d'exécution et à la souplesse d'utilisation. La plupart des effets sont désactivables par une simple option dans un fichier de paramètre spécifique au effets du disque **disk.in**.

Prenons un exemple. Le couple exercé par le disque sur la planète peut être issus des formules de Paardekooper et al. [2011], ou bien suivre plusieurs lois artificielles permettant de tester certains effets dans des cas simplifiés. Pour autant, cette souplesse d'utilisation ne se fait pas au détriment de la célérité du code car au lancement du code, les options sont lues et des pointeurs de fonctions permettent au code d'exécuter directement la bonne fonction lors de l'intégration, sans avoir à tester à chaque pas de temps quelle fonction doit être lancée.

Un programme externe, nommé **test_disk** permet d'effectuer des tests unitaires sur différentes fonctions, afin de vérifier quand bon nous semble que chaque fonction n'est pas perturbée par les autres et donne des résultats corrects à la fois physiquement et numériquement.

2.3.2 Paramètres divers

Ici je regroupe des paramètres du disque qui nécessitent simplement une valeur :

```
b/h = 0.6
adiabatic_index = 1.4
mean_molecular_weight = 2.35
disk_edges = 0.1 100.
sample = 800
```

b/h est la longueur de lissage du potentiel gravitationnel d'une planète (qui diverge dans les simulations hydrodynamiques et qui est un paramètre des formules de Paardekooper et al. [2011].

adiabatic_index est l'indice adiabatique γ comme son nom l'indique. De même, **mean_molecular_weight** est la masse moléculaire moyenne μ.

disk_edges défini les deux extrémités du disque, les bords internes et externes.

sample défini le nombre de points qu'auront les profils radiaux des différents paramètres du disque. Ces points ne sont pas répartis uniformément, il y a plus de points au bord interne qu'au bord externe, afin d'avoir une évolution plus fine des paramètres en fonction du rayon.

2.3.3 Densité de surface

surface_density permet de définir le profil en loi de puissance pour la densité de surface :

```
surface_density = 500 0.5
```

Ici, on a défini le profil suivant :

$$\Sigma(R) = 500. \cdot R^{-0.5}\,\mathrm{g/cm^2}$$

Mais il est aussi possible de donner un profil tabulé de densité de surface en fonction du rayon en paramètre d'entrée, en spécifiant le paramètre suivant :

```
surface_density = manual
```

Ainsi, le profil de densité de surface sera lu à partir du fichier **surface_density_profile.dat** qui doit être constitué de deux colonnes, la première étant la valeur du rayon en AU, et la deuxième la densité de surface en $\mathrm{g/cm^2}$. Les lignes doivent être classées par ordre croissant de distance orbitale. (les premières lignes étant les points les plus proches de l'étoile, et les dernières les points les plus lointains.

> **Remarque :** Une interpolation sera réalisée si la discrétisation du fichier d'entrée est différente de celle du code.

À ceci s'ajoute un paramètre supplémentaire :

```
inner_smoothing_width = 0.05
```

Ce paramètre représente la longueur d'amortissement de la densité de surface au bord interne du disque, afin que la densité de surface au bord interne soit très faible. Cette longueur est exprimée en pourcentage de distance orbitale du bord interne ; c'est à dire que si le bord interne est à 0.1 AU, alors dans le cas présent, le lissage sera effectué sur une longueur de 0.005AU

2.3.4 Irradiation de l'étoile centrale

is_irradiation permet de définir si on veut inclure ou non l'irradiation dans le calcul de l'équilibre énergétique du disque.

```
is_irradiation = 1
disk_albedo = 0.5
r_star = 4.65e-3 ! AU
t_star = 5700 ! K
```

Les paramètres sont relativement explicite mais pour détailler, **disk_albedo** est l'albedo moyen du disque protoplanétaire, il représente le fait qu'une partie de la lumière incidente de l'étoile est directement réfléchie vers l'espace.

r_star et **t_star** sont respectivement le rayon de l'étoile en AU et sa température en Kelvin.

La manière dont est modélisée l'irradiation de l'étoile centrale est détaillée dans [§ 1.2.3 page 24].

2.3.5 Viscosité

Il est possible de définir plusieurs types de viscosité via l'option **viscosity_type** : **constant**, **alpha** et **alpha_dz**.

constant

Ce paramètre permet de définir une viscosité ν constante dans tout le disque. La valeur de la viscosité associée est définie dans le paramètre **viscosity** en cm^2/s.

```
viscosity_type = constant
viscosity = 1e15 ! cm^2/s
```

alpha

Ce paramètre permet de définir une viscosité via la prescription alpha de Shakura and Sunyaev [1973]. La valeur du paramètre alpha sera lue dans le paramètre **alpha**.

```
viscosity_type = alpha
alpha = 5e-3
```

alpha_dz

Ce paramètre permet de définir une viscosité alpha par morceau, permettant de modéliser une dead zone. On aura donc 3 zones avec 3 alpha différents. Pour définir ces zones là, il faut donner dans le paramètre **alpha_dz** trois valeurs de α et dans **radius_dz** deux valeurs de distance orbitales (en AU) pour définir les bornes de la dead zone.

```
viscosity_type = alpha_dz
alpha_dz = 0.005 0.0001 0.005
radius_dz = 1.0 10.0 ! in AU
```

Quand cette option est activée, une modification au profil de densité est appliquée, afin de modéliser une sous-densité, puis une sur-densité avant et après le bord interne de la zone morte. L'écart maximum de ces « bumps » est de 15% de la valeur de la densité au bord interne de la zone morte.

À ceci s'ajoute un lissage des valeurs de α entre la valeur à gauche et la valeur à droite de la transition selon une tangente hyperbolique. La transition s'effectue typiquement sur une longueur égale à 10% de la position de la transition dans le disque (si la transition est à 1AU, alors la transition a lieu sur 0.1 AU autour de la transition).

2.3.6 Opacité

Afin de pouvoir les comparer, j'ai ajouté au code la possibilité de tourner avec différents modèles pour l'opacité.

Les différents modèles sont [Bell and Lin, 1994, Zhu et al., 2009, Chambers, 2009, Huré, 2000]

bell

```
opacity_type = bell
```

L'opacité est alors calculée en utilisant le modèle fourni par Bell and Lin [1994].

zhu

```
opacity_type = zhu
```

L'opacité est alors calculée en utilisant le modèle fourni par Zhu et al. [2009].

chambers

```
opacity_type = chambers
```

L'opacité est alors calculée en utilisant le modèle fourni par Chambers [2009]. Ce modèle est très simplifié et utilisé une opacité constante sur un grand régime de température, pour ensuite faire une transition vers une loi de puissance à très haute température.

hure

```
opacity_type = hure
```

L'opacité est alors calculée en utilisant le modèle fourni par Huré [2000].

À la différence de tous les autres modèles que j'ai implémenté, celui de Huré [2000] est directement une table d'opacité, sans faire intervenir de loi de puissance pour différents régimes.

À la différence des autres modèles, il n'introduit pas d'incertitudes supplémentaire via les loi de puissance qu'il défini.

En effet, dans le cas qui nous intéresse, c'est à dire la migration planétaire via la formule de [Paardekooper et al., 2011], l'indice des loi de puissance pour la densité de surface et la température a une très grande influence sur la couple effectif du disque. Et les transitions d'opacités, très marquées lors de la transition des lois de puissance,

fait apparaître des zones particulières dans le disque qui n'ont parfois aucune réalité physique mais ont de grandes conséquences sur le résultat des simulations. De même, le lissage qu'elles introduisent masquent certaines zones d'intérêt qui ne sont mises en évidence qu'avec une table d'opacité où tous les effets fins ont été préservés.

2.3.7 Turbulence

Pour activer la turbulence dans le disque, c'est à dire l'effet que la turbulence peut induire sur la migration planétaire, il suffit d'utiliser le paramètre suivant :

```
is_turbulence = 1
```

La turbulence n'est ici qu'une migration stochastique de moyenne nulle qui perturbe les planètes et leur migration.

Le modèle utilisé est le même que celui détaillé dans Ogihara et al. [2007]. Le principe est de définir un potentiel turbulent dans le disque, fait de la superposition de perturbation individuelle qui ont des modes m, temps de vie t_m et position dans le disques différents.

Dans le cas typique, il y a 100 modes différents dans le disque :

$$\Phi_{\text{turb}}(R,\phi,t) = \gamma R^2\Omega^2 \sum_{k=1}^{100} \Lambda_k(R,\phi,t) \tag{2.2}$$

avec

$$\Lambda_k = \xi_k e^{-\frac{(R-R_k)^2}{{\sigma_k}^2}} \cos\left(m_k\phi - \phi_k - \Omega_k\tilde{t}_k\right) \sin\left(\pi\tilde{t}_k/\Delta t_k\right) \tag{2.3}$$

ξ_k est une constante adimensionnée déterminée aléatoirement en suivant une distribution gaussienne.

R_k et ϕ_k sont respectivement les coordonnées radiales et azimutales du mode k choisies aléatoirement et de manière uniforme pour l'un entre les bornes du disque, pour l'autre entre 0 et 2π.

Chaque mode k possède un nombre de mode m_k déterminée selon une distribution logarithmique entre $m = 1$ et $m = 150$, le nombre de mode déterminant l'extension radiale et la durée du vie du mode k.

$\sigma_k = \pi R_k/4m_k$ est l'extension radiale de ce mode tandis que Ω_k représente la vitesse angulaire képlerienne à la position $R = R_k$.

$\Delta t_k = 0.2\pi R_k/m_k c_s$ est la durée de vie du mode k.

Les modes apparaissent et disparaissent en fonction de leur temps de vie et sont remplacés afin qu'il y ait toujours 100 modes différents dans le disque à un instant t. Chaque mode k est créé à un instant $t_{0,k}$ et se termine quand $\tilde{t}_k = t - t_{0,k} > \Delta t_k$.

2.3.8 Migration

real

C'est le cas le plus classique. Il n'y a pas besoin de définir d'autres paramètres, la migration induite par le disque de gaz sera simplement calculée à partir du modèle de Paardekooper et al. [2011].

```
torque_type = real
```

mass_dependant

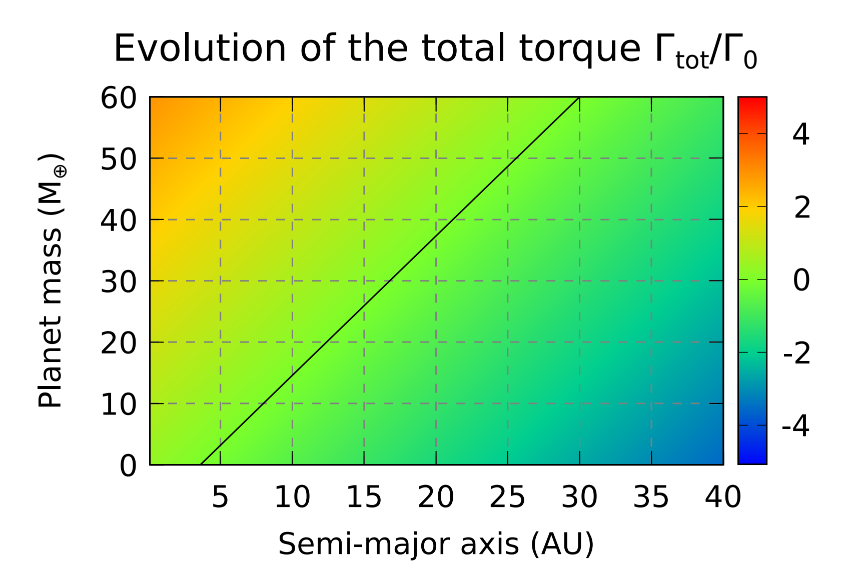


FIGURE 2.2 – Cette carte représente l'effet du disque dans le cas de l'option **mass_dependant** pour une planète en fonction de sa position en abscisse et de sa masse en ordonnée. La ligne noire représente la zone de couple nul, c'est à dire une zone où la migration de la planète s'arrête.

On définit une zone de convergence artificielle qui va dépendre de la masse des planètes. On va donc devoir définir deux bornes en masses et deux bornes en distance orbitale qui vont déterminer cette ligne de couple nul. À l'intérieur (resp. extérieur) de cette séparation virtuelle, la migration sera vers l'extérieur (resp. intérieur).

Ensuite, on défini une pente linéaire plus ou moins importante pour voir à quelle vitesse on va tendre vers la valeur de saturation à mesure qu'on s'éloigne de la zone de convergence. Une pente de 1 signifie que le couple Γ/Γ_0 augmente de 1 tous les 10 AU.

En résumé, on a ces paramètres suivants à définir :

```
torque_type = mass_dependant

mass_dep_cz_m_max = 30 ! AU
mass_dep_m_max = 60 ! m_earth

mass_dep_cz_m_min = 4 ! AU
```

```
mass_dep_m_min = 1 ! m_earth

torque_profile_steepness = 1.0
```

linear_indep

Même chose que précédemment, on peut définir un couple artificiel qui défini une zone de convergence indépendante de la masse, c'est à dire qu'on ne spécifie que la position de la zone de convergence dans le disque. On a donc :

```
torque_type = linear_indep
indep_cz = 3.0 ! AU
torque_profile_steepness = 1.0
```

Une pente de 1 signifie que le couple Γ/Γ_0 augmente de 1 tous les 10 AU.

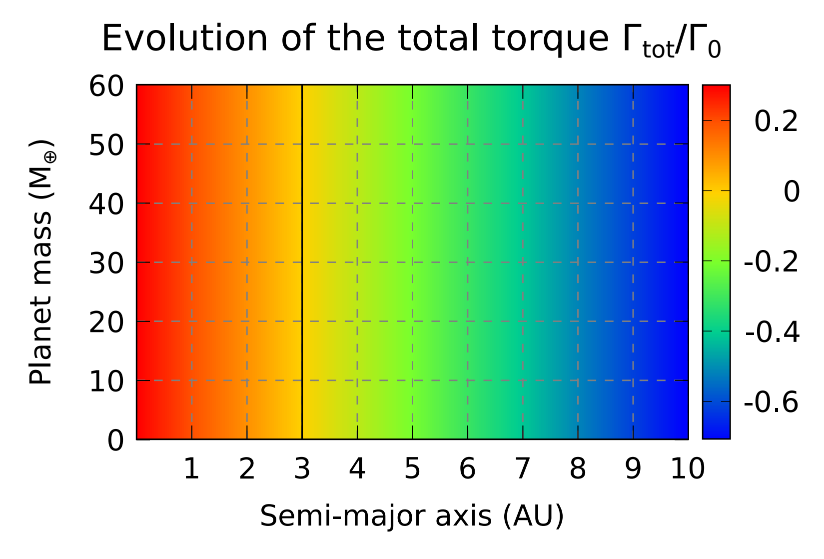


FIGURE 2.3 – Cette carte représente l'effet du disque dans le cas de l'option **linear_indep** pour une planète en fonction de sa position en abscisse et de sa masse en ordonnée. La ligne noire représente la zone de couple nul, c'est à dire une zone où la migration de la planète s'arrête.

tanh_indep

Ici, on défini aussi une zone de convergence indépendante de la masse, mais au lieu d'avoir une évolution linéaire du couple à mesure qu'on s'éloigne de la zone de convergence, on a une tangente hyperbolique qui sature à une valeur que l'on peut donner en paramètre.

La valeur du couple de saturation défini la valeur absolue du couple vers laquelle on va tendre quand on est très loin de la zone de convergence. Si on est à l'extérieur, ce sera cette valeur de saturation prise négativement, tandis que c'est la valeur positive qui est utilisée à l'intérieur.

On a donc les paramètres suivants à définir :

```
torque_type = tanh_indep
indep_cz = 3.0 ! AU
saturation_torque = 1.0 ! in Gamma_0
```

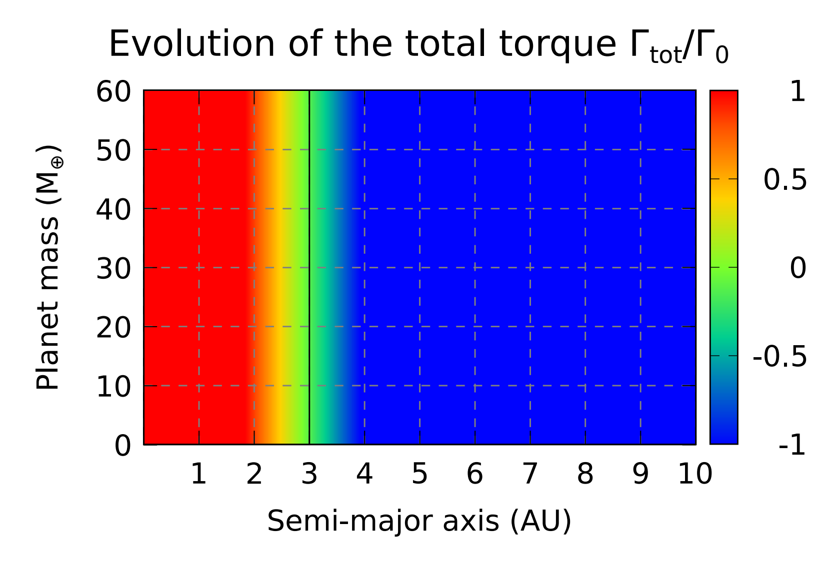


FIGURE 2.4 – Cette carte représente l'effet du disque dans le cas de l'option **tanh_indep** pour une planète en fonction de sa position en abscisse et de sa masse en ordonnée. La ligne noire représente la zone de couple nul, c'est à dire une zone où la migration de la planète s'arrête.

manual

Il est aussi possible de rentrer manuellement un couple total en fonction de la position de la planète dans le disque.

Les valeurs seront alors lues à partir du fichier **torque_profile.dat**. La première colonne sera les positions dans le disque en AU tandis que la deuxième colonne sera le couple exercé par le disque en unité de Γ_0 (c'est à dire que l'effet de la masse de la planète sur la vitesse de migration sera toujours pris en compte dans le code au travers de la dépendance de Γ_0 en fonction de la masse de la planète et de la masse du disque.

2.4 Disque 1D

Afin de calculer les effets d'un disque de gaz, une modélisation de ce dernier est nécessaire. Le but étant d'avoir une grande souplesse, le disque implémenté est bien entendu très simplifié. Toutes les quantités sont intégrées et invariantes selon la hauteur z et la position azimutale θ dans le disque, résultant en un modèle radial 1D de toutes les quantités.

Dans la mesure du possible, les quantités du disque ont été calculées de manière consistante. Je vais présenter dans la suite de manière chronologique comment sont calculées les grandeurs physiques du disque.

2.4.1 Profil de densité de surface

Le profil de densité de surface est défini au début de la simulation comme une loi de puissance de la forme :

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 \times R^{-d} \tag{2.4}$$

où Σ_0 est la densité de surface à 1 AU et d l'indice de la loi de puissance.

Ce profil de densité de surface est défini pour une certaine étendue radiale. On défini donc un bord interne R_{in} et un bord externe R_{out}. Le bord interne est généralement à 0.1 AU et le bord externe à 100 AU.

Afin de calculer les valeurs suivantes, ce disque est échantillonné et toutes les valeurs nécessaires sont ensuite calculées à chacun de ces points.

Le profil de densité de surface est le paramètre d'entrée le plus important. Il est celui à partir duquel on calcule toutes les autres quantités du disque, température, échelle de hauteur, etc. . .

Le profil étant une loi de puissance, un amortissement est effectué au bord interne du disque afin que la valeur de la densité au bord interne soit proche de zéro.

2.4.2 Table d'opacité

Afin de pouvoir calculer le profil de température, on a besoin de choisir un modèle pour l'opacité. Je ne détaillerai pas ici les différents modèles car une étude complète sur le sujet a été effectuée, afin de comprendre l'influence du choix du modèle sur les résultats des simulations.

Par contre, quel que soit le modèle, on a généralement une dépendance en fonction de la densité et de la température. L'opacité est donc un paramètre de la résolution de l'équation qui nous permet d'avoir la température. L'opacité n'est pas, dans notre modèle, une quantité qu'on fixe *a priori*, mais plutôt un des paramètres de sortie de la résolution de l'équation de l'énergie dans le disque.

2.4.3 Profil de température

Afin de construire le profil de température point par point, on résout, pour chaque position dans le disque définie dans le profile, l'équation de l'énergie (1.37 page 27).

De manière consistante, cette équation a pour paramètre d'entrée la position, et on cherche à trouver les valeurs de la température T, échelle de hauteur H, profondeur optique τ, diffusivité thermique χ. Toutes ces valeurs sont fixées une fois qu'un ensemble cohérent de valeurs satisfont l'équation.

Afin de résoudre cette équation du type $f(x) = 0$, j'ai utilisé une version modifiée de la méthode **zbrent** de **Numerical Recipes** [Press et al., 1992]

2.5 Migration type I

La migration de type I est implémentée dans le code en utilisant le modèle 1D de disque, qui définit pour toute position du disque, une température, une densité de surface, et tous les autres paramètres nécessaires comme l'échelle de hauteur. En utilisant ces paramètres, on obtient ainsi le couple qu'exerce le disque sur la planète en fonction de sa masse et de sa position via la formule semi-analytique de Paardekooper et al. [2011].

Les deux différences principales entre le cadre du modèle de Paardekooper et al. [2011] et le disque que j'ai modélisé, c'est que dans mon cas je n'ai pas un profil de température en loi de puissance (avec une seule loi de puissance), mais j'ai une loi de puissance définie point par point. C'est à dire que pour chaque zone du disque, la température est calculée de manière cohérente avec les autres paramètres du disques, et que l'indice de la loi de puissance correspondante est calculée en fonction des températures autour.

La deuxième différence est que j'ai un profil pour l'échelle de hauteur H et le rapport d'aspect $h = H/R$ du disque au lieu d'avoir un rapport d'aspect constant pour tout le disque.

De plus, certaines erreurs se sont glissées dans ce papier. [Bitsch and Kley, 2011, appendice A] fait remarquer en particulier qu'il manque un facteur 4 dans l'équation (33). Ainsi, la formule que j'ai utilisé pour calculer la conductivité thermique χ est :

$$\chi = \frac{16\gamma(\gamma-1)\sigma T^4}{3\kappa\rho^2 H^2 \Omega^2} \tag{2.5}$$

Il y a aussi une erreur dans l'équation (35) car le disque se refroidit par la surface supérieur et la surface inférieure. Mais comme j'utilise dans mon code une équation de l'énergie (1.37 page 27) un peu plus complexe où j'ai tenu compte de ce fait là, cette erreur n'a pas d'incidence sur le calcul du couple.

Les formules nous donnent alors un couple exercé par le disque sur la planète.

À partir de ce couple, on définit un temps de migration t_{mig} comme :

$$t_{\text{mig}} = \frac{J}{2\Gamma} \tag{2.6}$$

où J est le moment angulaire total de la planète et $\Gamma = \dot{J}$ est le couple total exercé par le disque sur la planète.

L'accélération due à la migration $\overrightarrow{a_{\text{mig}}}$ est alors donnée par :

$$\overrightarrow{a_{\text{mig}}} = \frac{\overrightarrow{v}}{t_{\text{mig}}} \tag{2.7}$$

où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse instantanée de la planète.

2.6 Amortissement de e et I

L'amortissement de l'eccentricité e et de l'inclinaison I d'une planète plongée dans un disque protoplanétaire est modélisée dans le code via les formules de [Cresswell and Nelson, 2008, eq. (9), (11) et (12)] :

$$t_{\text{wave}} = \frac{M_\star}{m_p} \frac{M_\star}{\Sigma_p {a_p}^2} \left(\frac{H}{r}\right)^4 {\Omega_p}^{-1} \tag{2.8a}$$

$$t_e = \frac{t_{\text{wave}}}{0.780} \left[1 - 0.14 \left(\frac{e}{H/r}\right)^2 + 0.06 \left(\frac{e}{H/r}\right)^3 + 0.18 \left(\frac{e}{H/r}\right) \left(\frac{i}{H/r}\right)^2\right] \tag{2.8b}$$

$$t_i = \frac{t_{\text{wave}}}{0.544} \left[1 - 0.30 \left(\frac{i}{H/r}\right)^2 + 0.24 \left(\frac{i}{H/r}\right)^3 + 0.14 \left(\frac{e}{H/r}\right)^2 \left(\frac{i}{H/r}\right)\right] \tag{2.8c}$$

L'amortissement de I est arrêté quand l'inclinaison descend en dessous de $I < 5 \cdot 10^{-4}$ rad afin d'empêcher les planètes d'être parfaitement dans le plan (x, y), essentiellement pour empêcher des problèmes numériques.

2.7 Effet de l'excentricité sur le couple de corotation

Afin de tenir compte d'un effet mis en évidence par Bitsch and Kley [2010], une petite modification a été effectuée dans le calcul du couple total Γ exercé par le disque sur la planète.

En effet, il a été montré que l'excentricité d'une planète a une influence sur sa zone fer-à-cheval et par extension, sur son couple de corotation Γ_C. Un paramètre d'amortissement D, compris entre 0 et 1 a ainsi été ajouté au calcul du couple total :

$$\Gamma = \Gamma_0 \cdot (\Gamma_L + D \cdot \Gamma_C) \tag{2.9}$$

où $\Gamma_0 = \left(\frac{q}{h}\right)^2 \Sigma_p {r_p}^4 {\Omega_p}^2$ et Γ_L est le couple de Lindblad.

La valeur du paramètre d'amortissement D est donnée par une formule qui a été calculée pour coller au mieux aux simulations de Bitsch and Kley [2010], détaillée dans Cossou et al. [2013], et recopiée ici :

$$D = \frac{\Gamma_C(e)}{\Gamma_C(e = 0)} = 1 + a \cdot \left[\tanh(c) - \tanh\left(\frac{b * e}{x_s} + c\right)\right] \tag{2.10a}$$

$$a = 0.45 \qquad b = 3.46 \qquad c = -2.34 \tag{2.10b}$$

où x_s représente la demi-largeur de la zone fer-à-cheval divisée par le demi-grand axe.

2.8 Désactivation des effets du disque

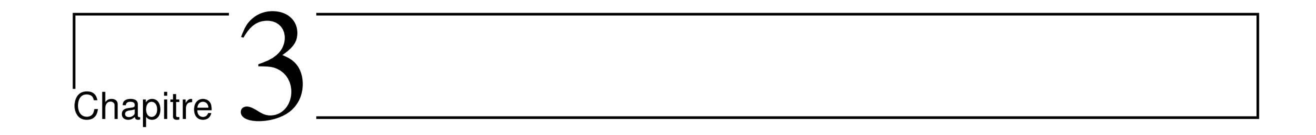
Quand une planète sort des bornes du disques, les effets d'amortissement de e et I sont désactivés, au même titre que la migration dû à la présence du disque. Ce cas survient rarement au bord externe du disque (généralement à 100 AU), mais est beaucoup plus probable au bord interne (généralement à 0.1 AU).

2.9 Validité des éléments orbitaux

Lorsque d'une rencontre proche entre deux planètes, leurs interactions gravitationnelles rendent caduque les formules qui permettent de calculer les éléments orbitaux à partir des vitesses et positions car ceci suppose qu'on est dans le cas d'une orbite képlerienne isolée.

Dans de tels cas, on peut avoir des demi-grands axe négatifs, des excentricités supérieures à 1. Si c'est déjà en soit un problème physique, c'est aussi et surtout un problème numérique car cela fait apparaître des **Not A Number** (NaN) quand par exemple on a le demi-grand axe en argument d'une racine carrée. Ceci a donc pour conséquence concrète de faire planter le code, au mieux, ou pire, de le faire tourner avec tous les paramètres de la simulation peu à peu gangrénés par des **NaN**.

En conséquence, j'ai décidé de remplacer dans la plupart des calculs de mes simulations, le demi-grand axe par le rayon $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ qui lui n'est pas sensible à ce genre de divergences. Quand il y a une excentricité, il est clair que le rayon est différent du demi-grand axe. Mais les excentricités étant généralement faible, l'erreur faite sur le demi-grand axe reste faible. De plus les rencontres proches représentent un temps négligeable de la simulation au regard des centaines de milliers d'années sur lesquelles on intègre les orbites. On considère donc que la migration induite sur les planètes pendant leur temps de rencontre proche est totalement négligeable au regard du reste de la simulation.



Mécanismes individuels

Sommaire

3.1 Les Résonances de Moyen Mouvement (MMR)

3.1.1 Définition

Les *résonances de moyen mouvement* sont des configurations orbitales particulières de deux planètes dans lesquelles il existe un lien entre les périodes orbitales des planètes. Exemple, si deux planètes sont en résonance 3 : 2, ça signifie que la planète interne effectuera 3 orbites pendant que la planète externe en effectuera 2.

Ces configurations particulières confèrent une stabilité accrue aux planètes. Plus la résonance est forte et plus il sera difficile pour les planètes d'en sortir.

On met généralement une résonance sous la forme $(p + q) : p$ où p et q sont des entiers. Cette forme permet de mettre en évidence un des paramètres qui permet de rendre compte de la force de la résonance. En effet, plus q est petit et plus la résonance est force. Ainsi, les résonances avec $q = 1$ sont les plus fortes. On dit que q est l'ordre de la résonance (plus l'ordre est petit et plus la résonance est forte).

⚠ Mais ce n'est pas le seul paramètre à prendre en compte pour évaluer la force d'une résonance et je suis bien incapable de tous les décrire.

Pour une résonance $(p + q) : p$ on définit un certain nombre d'angles θ_i dits *angles de résonance* de la forme :

$$\theta_{i+1} = (p + q)\lambda_2 - p\lambda_1 - [i\varpi_1 + (q - i)\varpi_2] \tag{3.1}$$

avec i allant de 0 à q ; où λ sont les longitudes moyennes, ϖ les longitudes du péricentre et les indices 1 et 2 se réfèrent respectivement à la planète interne et externe. Pour une résonance $(p + q) : p$ on a donc $q + 1$ angles de résonance.

Les angles de résonances mesurent l'angle entre les deux planètes au point de conjonction. Si un seul de ces angles est en libration (oscillation autour d'une valeur moyenne) au lieu de circuler librement de 0 à 2π alors on dit que les planètes sont en résonances. Le nombre d'angles en libration permettra aussi d'avoir une idée de la force de la résonance.

Exemple : Soit une résonance 7 : 2, les angles de résonances sont :

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= 7\lambda_2 - 2\lambda_1 - 5\varpi_1 \\
\theta_2 &= 7\lambda_2 - 2\lambda_1 - (4\varpi_1 + 1\varpi_2) \\
\theta_3 &= 7\lambda_2 - 2\lambda_1 - (3\varpi_1 + 2\varpi_2) \\
\theta_4 &= 7\lambda_2 - 2\lambda_1 - (2\varpi_1 + 3\varpi_2) \\
\theta_5 &= 7\lambda_2 - 2\lambda_1 - (1\varpi_1 + 4\varpi_2) \\
\theta_6 &= 7\lambda_2 - 2\lambda_1 - 5\varpi_2
\end{aligned}$$

Remarque : Les *lacunes de Kirkwood* font elles aussi intervenir des résonnances mais contrairement à ce qu'on pourrait penser, ces résonances avec Jupiter sont des

zones déplétées en astéroïdes. La raison profonde n'est pas parfaitement connue mais il semblerait que ce soit dû au chaos. Je ne saurais pas expliquer exactement ce que ça veut dire par contre.

La résonance imposte une valeur de a, mais des échanges sont possibles entre les deux corps en résonance (je ne sais pas bien de quelles valeurs par contre), et il est possible que par ce biais l'eccentricité puisse augmenter, et ainsi dépléter la lacune de kirkwood en favorisant les collisions entre les objets en résonance et les autres qui sont dans la ceinture.

3.1.2 Résonances et excentricité

3.1.3 Stabilité et ordre des résonances

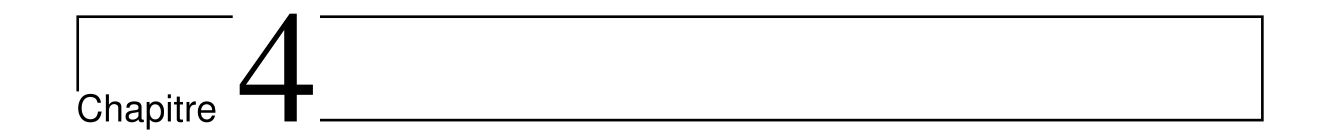
3.2 Les Zones de Convergence

3.2.1 Existence et intérêt

3.2.2 Les différents types

3.2.3 Diagrammes de couple a-m

3.2.4 Résonances et Accrétions



Mécanismes de formation

Sommaire

4.1 Décalage de la Zone de Convergence

Cette partie a fait l'objet d'un article, publié dans le journal Astronomy & Astrophysics : Cossou et al. [2013].

Une zone de convergence est une zone du disque agissant comme un piège à planète, la migration emmenant les planètes dans cette zone du disque où elles se stabilisent. Ici nous cherchons à montrer que dans le cas multi planétaire, les choses sont un peu différentes. Des planètes en résonance ne se comportent plus de la même manière, mais plutôt comme un système dans sa globalité, migrant dans une zone différente du disque.

4.1.1 Introduction

Des planètes de faible masse ($1 - 60\,\mathrm{M}_\oplus$) interagissent avec le disque de gaz dans lequel elles se forment et génèrent des ondes de densité dans le disque [Goldreich and Tremaine, 1979]. La planète elle même est influencée par cette onde de densité et migre par migration de Type I [Ward, 1997].

Dans les disques isothermes, la migration de Type I est gouvernée par le couple différentiel dû aux ondes de Lindblad et le couple de corotation. Pour les planètes, la migration qui en résulte est rapide et dirigée vers l'étoile centrale [Tanaka et al., 2002]. Dans les disques radiatifs, un couple lié au gradient d'entropie apparait dans la zone en fer-à-cheval de la planète. Ce dernier peut contrebalancer le couple différentiel de Lindblad au point de transformer la migration vers l'intérieur précédemment présentée en migration vers l'extérieur. Ainsi, dans de tels disques, la migration peut être dirigée soit vers l'intérieur soit vers l'extérieur [Paardekooper and Mellema, 2006, Kley and Crida, 2008]. Ceci rend possible l'existence de zones dans les disques où la migration s'arrête. Ces dernières sont appelées zone de convergence [CZs ; Lyra et al., 2010, Mordasini et al., 2011, Paardekooper et al., 2011].

À la zone de convergence, le couple de corotation (positif) compense exactement le couple différentiel de Lindblad (négatif). Ainsi, à la zone de convergence, une planète ne migre pas. Les zones de convergences pourraient ainsi concentrer les embryons planétaires et être le lieu de formation de planètes (ou cœurs) massives [Lyra et al., 2010, Horn et al., 2012].

Cependant, durant leur migration vers la zone de convergence les planètes vont interagir entre elles et se placer en résonance de moyen mouvement (Mean Motion Resonance : MMR), s'opposant ainsi à l'accrétion illimitée de matière à la zone de convergence [Morbidelli et al., 2008, Sándor et al., 2011]. Malgré cela, des collisions ont bien lieu à la zone de convergence. Quand les embryons sont emprisonnés dans une chaine de résonance avec suffisamment de corps pour engendrer des perturbations, les résonances peuvent se briser et des collisions se produire entre les corps du système. De plus, la turbulence pourrait casser les résonances et augmenter le taux d'accrétion.

Bitsch and Kley [2010] ont montré que le couple de corotation était atténué quand une planète avait une excentricité telle que son orbite oscille sur une distance de l'ordre de la demi-largeur de la zone fer-à-cheval x_s.

Quand deux planètes sont en résonance à cause de la migration convergente, leurs excentricités sont excitées de manière continues malgré la présence du disque qui a tendance à amortir les excentricités et circulariser les orbites. [par exemple Cresswell and Nelson, 2008]. Ce phénomène devrait à son tour modifier le couple de corotation et ainsi modifier l'équilibre entre couple différentiel de Lindblad et couple de corotation. En conséquence, la migration de la planète elle-même devrait être modifiée.

Nous présentons des simulations de migration convergentes de planètes de faible masse ($M = 1 - 10\,\mathrm{M}_\oplus$) dans un disque de gaz idéalisé (voir [§ 2.3.8 page 57]). On utilise un modèle simplifié de rétroaction de l'excentricité sur le couple de corotation. Nous montrons que les planètes qui prises de manière isolé migrent à la zone de convergence, ne migrent plus au même endroit quand il y a plusieurs planètes. Au lieu de ça, elles migrent à une position d'équilibre décalée vers l'intérieur du disque qui correspond à une somme nulle des couples exercées sur le système.

La position de cette zone d'équilibre dépend de l'excentricité maintenue par perturbation mutuelle de chaque planète constituante du système.

4.1.2 Méthode

On modélise une Zone de Convergence (CZ : Convergence Zone) artificielle, qui imite une zone de convergence indépendante de la masse, c'est à dire que la position de la zone de convergence est la même pour toutes les planètes quelle que soit leur masse [§ 3.2.2 page 65]. En particulier, on s'intéresse à la zone de convergence que l'on peut trouver à une transition d'opacité telle que celle représentée sur [Figure 4.1], où l'on peut voir un renversement brutal du couple, qui passe de positif à négatif [voir par exemple Masset, 2011].

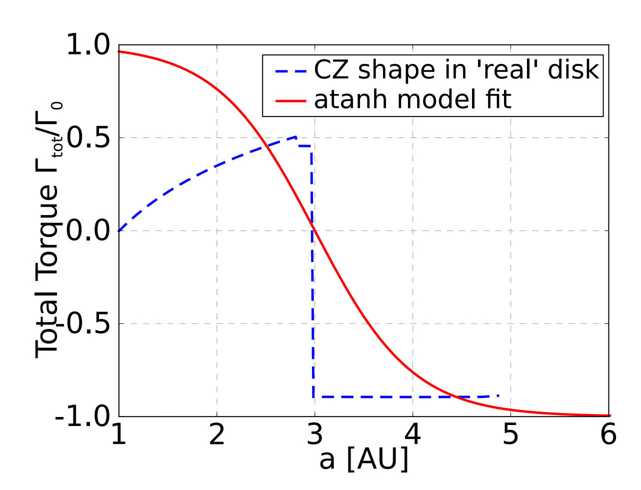


Figure 4.1 – Le couple total de notre disque standard est représenté en rouge. La ligne bleue pointillée représente le profil de couple ressenti par une planète de $10\,\mathrm{M}_\oplus$ autour d'une transition d'opacité, calculé à partir des équations de Paardekooper et al. [2011].

À noter qu'une fonction de Heavyside n'a pas été utilisée car la marche d'escalier dans le profil *réel* n'est due qu'au fait que la table d'opacité n'a pas été lissée. On s'attend à ce que la transition soit plus douce dans la réalité.

La position de la zone de convergence était 3 UA. À l'intérieur de 3 UA, le couple est positif et égal à $\Gamma_0 = \left(\frac{q}{h}\right)^2 \Sigma_p {r_p}^4 {\Omega_p}^2$., la migration se fait donc vers l'extérieur. Au delà de 3 UA, le couple total est égal à $-\Gamma_0$. Ici q est le rapport entre les masses de la planète et de l'étoile, h est le rapport d'aspect qui dépend du profil de température mais vaut typiquement 0.05. Σ_p, r_p et Ω_p sont respectivement la densité de surface, la distance orbitale et la vitesse angulaire pour la planète.

Le couple total est la somme du couple différentiel de Lindblad Γ_L — que l'on suppose constant et indépendant de e — et le couple de corotation Γ_C. Le principal intérêt de la zone de convergence artificielle est de s'affranchir de la forme très complexe du profil réel et ne garder que la zone de convergence, afin d'en étudier les effets de manière isolée.

Bitsch and Kley [2010] montrent que la structure de la zone fer-à-cheval est modifiée quand l'excentricité augmente. En conséquence, son couple de corotation Γ_C, lié à cette région du disque, diminue.

Nous avons élaboré une formule simple qui reproduit l'effet de l'excentricité sur Γ_C par une simple calibration des simulations 3D de Bitsch and Kley [2010] :

$$D = \frac{\Gamma_C(e)}{\Gamma_C(e=0)} = 1 + a \cdot \left[\tanh(c) - \tanh\left(\frac{b * e}{x_s} + c\right)\right] \tag{4.1}$$

où x_s représente la demi-largeur de la région fer-à-cheval en unité de distance orbitale de la planète considérée, e est l'excentricité de la planète, et notre ajustement statistique donne les valeurs suivantes pour les paramètres de la fonction :

$$a = 0.45 \qquad b = 3.46 \qquad c = -2.34 \tag{4.2}$$

On défini x_s comme [Paardekooper et al., 2010, eq. (44)] :

$$x_s = \frac{1.1}{\gamma^{1/4}} \left(\frac{0.4}{b/h}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{q}{h}} \tag{4.3}$$

où γ est l'indice adiabatique, q le rapport entre les masses de la planète et de l'étoile, h le rapport d'aspect et b/h la longueur de lissage du potentiel gravitationnel de la planète (dépendance issue des formules de Paardekooper et al. [2011]).

[Figure 4.2 page suivante] montre que notre formule simple (4.1) correspond bien à la tendance des simulations hydrodynamiques de l'effet de e sur Γ_C, en particulier pour les excentricités faibles. Il faut tout de même noter qu'il y a peu de points « expérimentaux » et qu'il semble y avoir des fluctuations aléatoires influençant les valeurs mesurées.

Afin de réaliser nos simulations, nous avons utilisé la version modifiée de l'intégrateur **Mercury**[Chambers, 1999] décrite [§ 2 page 47]. Nous avons utilisé en particulier la zone de convergence artificielle décrite [Figure 4.1 page ci-contre].

Nous supposons que le disque possède le profil de densité de surface suivant :

$$\Sigma(R) = 500\,(R/1\,\mathrm{AU})^{-1/2}\ \mathrm{g.cm}^{-2} \tag{4.4}$$

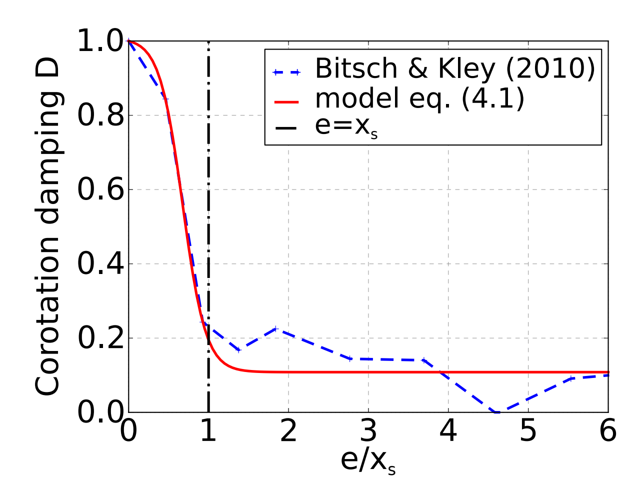


FIGURE 4.2 – Diminution du couple de corotation Γ_C en fonction de l'excentricité e. On suppose que l'atténuation ($0 < D < 1$) du couple de corotation en fonction de l'extencité e est la même dans un disque isotherme ou radiatif. Ainsi, on extrait la valeur de D à partir de la figure 2 de Bitsch and Kley [2010] en faisant la différence entre la valeur pour le disque radiatif et celle pour le disque isotherme, et normalisant de sorte que D vale 1 dans le cas $e = 0$.

Ce profil est alors utilisé dans le calcul de Γ_0 et de l'amortissement induit par le disque sur e et I.

Pour implémenter la migration induite par le couple du disque Γ, on note que $\Gamma = \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}$, et on défini une accélération de migration a_m telle que[Cresswell and Nelson, 2008, eq. (14)] :

$$a_m = -\frac{v}{t_m} \tag{4.5}$$

où v est la vitesse de la planète et $t_m = J/\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}$ le temps de migration (J est le moment cinétique).

Dans toutes les simulations, les planètes était initialement sur des orbites à faible excentricité ($e < 0.001$) et faible inclinaison ($I < 1°$). Chaque simulation a été intégrée pendant trois millions d'années, avec un pas de temps compris entre 0.4 et 3 jours.

4.1.3 Le cas de deux planètes

[FIGURE 4.3 page suivante] montre l'évolution de deux planètes de $1\,\mathrm{M}_\oplus$ initialement placées de part et d'autre d'une zone de convergence située à 3 UA. Alors qu'elles se rapprochent l'une de l'autre, les deux planètes croisent une série de résonances and finissent piégées dans la résonance 7:6. Les excentricités des deux planètes atteignent alors un équilibre entre excitation résonante et amortissement par le disque. Cette excentricité d'équilibre est environ égale à 0.5 fois la demi-largeur de la zone fer-à-cheval x_s et amortit le couple de corotation à environ 80% de sa valeur nominale (quand $e = 0$).

Les planètes se stabilisent et arrêtent de migrer à 1.77 et 1.96 UA, toutes les deux à l'intérieur de la position nominale de la zone de convergence. Compte tenu de leurs excentricités, la zone de convergence de la planète la plus interne est décalée à 1.95 UA tandis qu'elle est décalée à 1.74 UA pour la planète externe (située à 1.96 UA). On

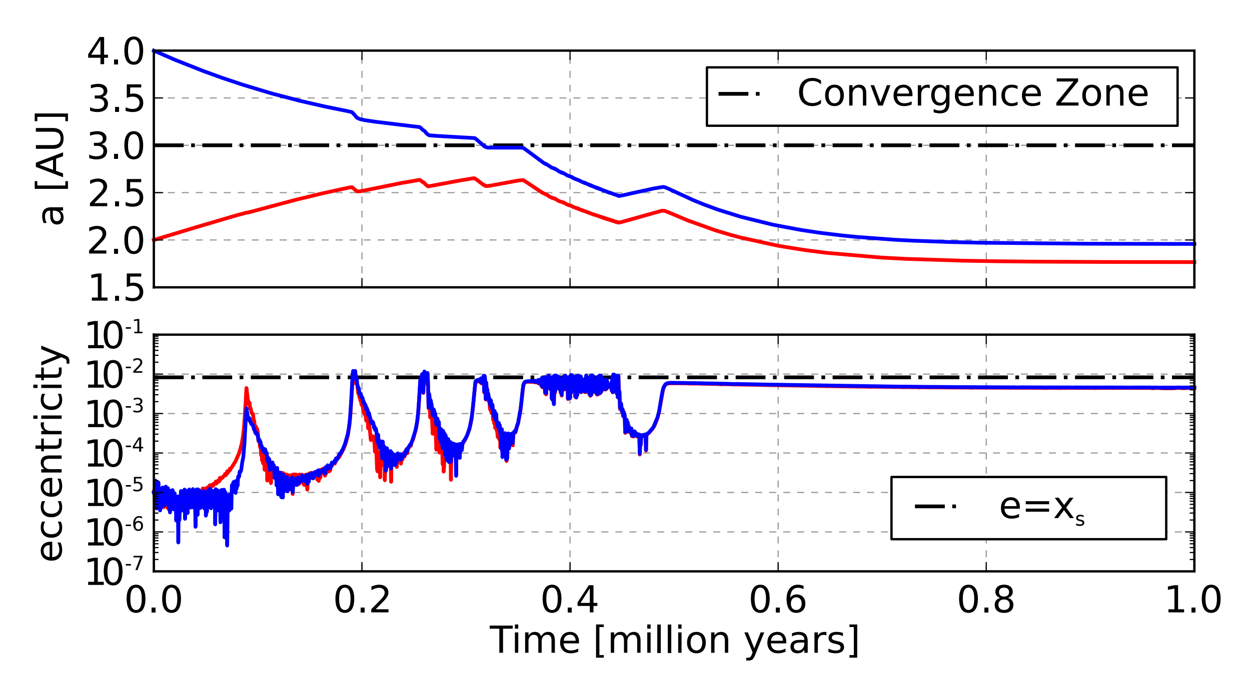


FIGURE 4.3 – Simulation de la migration convergence de deux planètes de 1 $M_\oplus$ vers la zone de convergence située à 3 UA, la rétroactio de l'excentricité e sur le couple de corotation Γ_C étant incluse (voir Figure 4.2).

constate alors qu'aucune des deux planètes n'est à une position d'équilibre. Chacune d'elle ressent un couple dirigé vers l'autre planète du système, de sorte que la migration tend à rapprocher les planètes tandis que les résonances les maintiennent éloignées.

Le décalage de la zone d'équilibre provient ici de l'équilibre nouveau entre le couple de Lindblad resté inchangé et le couple de corotation atténué par l'excentricité. *Les deux planètes se stabilisent autour d'une zone où le couple total exercé sur le système dans sa globalité est nul, même si chaque planète prise séparément ressent un couple de migration non nul.* Aucune des deux planètes n'est ici à une zone de convergence (même celle calculée en tenant compte de l'atténuation du couple de corotation).

Il est clair que les excentricités des planètes — excitées par les interactions entre planètes — sont le facteur clé pour déterminer la force du couple de corotation et la position effective de la zone de stabilisation du système. Pour deux planètes de même masse, le même comportement qualitatif est observé, quelle que soit la masse ou la résonance considérée : Une plus grande excentricité implique un amortissement plus fort du couple de corotation Γ_C et une stabilisation du système de plus en plus proche de leur étoile.

4.1.4 Effet du rapport de masse

Nous étudions maintenant le cas de deux planètes de masses différentes. [FIGURE 4.4 page suivante] représente les positions finales d'une série de simulations simples dans lesquelles une planète de 10 $M_\oplus$ est placée systématiquement à 3 UA en compagnie d'une autre planète, placée à 4 UA et dont la masse varie successivement entre 0.1 et 3 $M_\oplus$.

Dans [FIGURE 4.4 page suivante], la planète externe est systématiquement en réso-

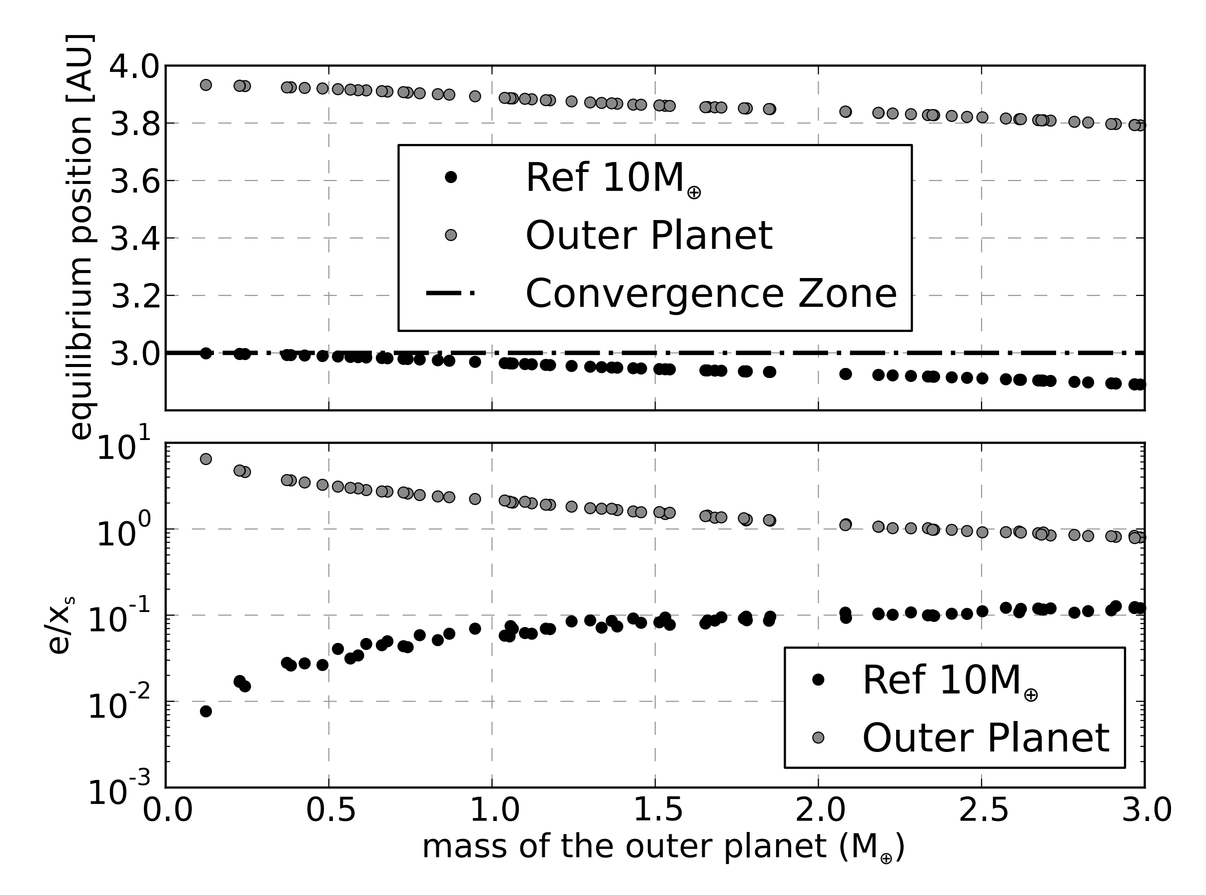


FIGURE 4.4 – Système final d'une série de simulations avec initialement une première planète à 3 UA de 10 $M_\oplus$ et une deuxième planète à 4 UA dont la masse varie de 0.1 à 3 $M_\oplus$. Les graphiques montrent la position d'équilibre des planètes (en haut) et les excentricités normalisées par rapport à la demi-largeur de la zone fer-à-cheval e/x_s (en bas) en fonction de la masse de la deuxième planète.

nance 3:2 avec la planète interne. Ainsi, la position finale des planètes est déterminée par leur masse respective ou, pour cette expérience, par la masse de la planète externe vu que la masse de la planète interne est fixe.

Plus la deuxième planète est massive, et plus le décalage du système planétaire par rapport à la zone de convergence est important. En effet, une planète externe plus massive induit une excentricité plus importante pour la planète interne, ce qui correspond à un amortissement plus important de son couple de corotation Γ_C et un décalage plus important de la zone d'équilibre du système. Compte tenu du fait que chaque planète possède une masse et une excentricité différentes, elles ressentent une zone de convergence différente (une pour chaque valeur de e/x_s). Pour autant, l'importance du décalage vers l'étoile centrale de la position d'équilibre est principalement déterminée par la dynamique de la planète la plus massive et de sa nouvelle zone de convergence.

[FIGURE 4.4] représente uniquement un sous-ensemble de toutes les simulations de cette expérience. Pour des masses plus importantes, les deux planètes étaient dans des résonances différentes, ce qui causait des discontinuités dans le diagramme, rendant difficile sa lecture. Malgré tout, le comportement du système de deux planètes est qualitativement le même.

4.1.5 Effet des résonances

Dans la position d'équilibre d'un système de deux planètes, l'ordre de la résonance entre les deux corps est aussi important (pour une résonance de moyen mouvement (p+q):p, p est l'ordre de la résonance).

Deux planètes en résonance 3:2 auront des excentricités plus importantes que si elles étaient en résonance 11:10. L'explication simple est qu'une résonance d'ordre moins élevé implique des conjonctions plus fréquentes, et ainsi des perturbations plus importantes (voir Murray and Dermott [2000] pour plus de détails). La résonance dans laquelle un système de deux planètes se place dépend de la vitesse de migration relative et du taux d'amortissement de l'excentricité par le disque (voir par exemple Mustill and Wyatt [2011]). Ces deux derniers paramètres sont déterminés à la fois par le disque, le profil de couple et les positions initiales des planètes.

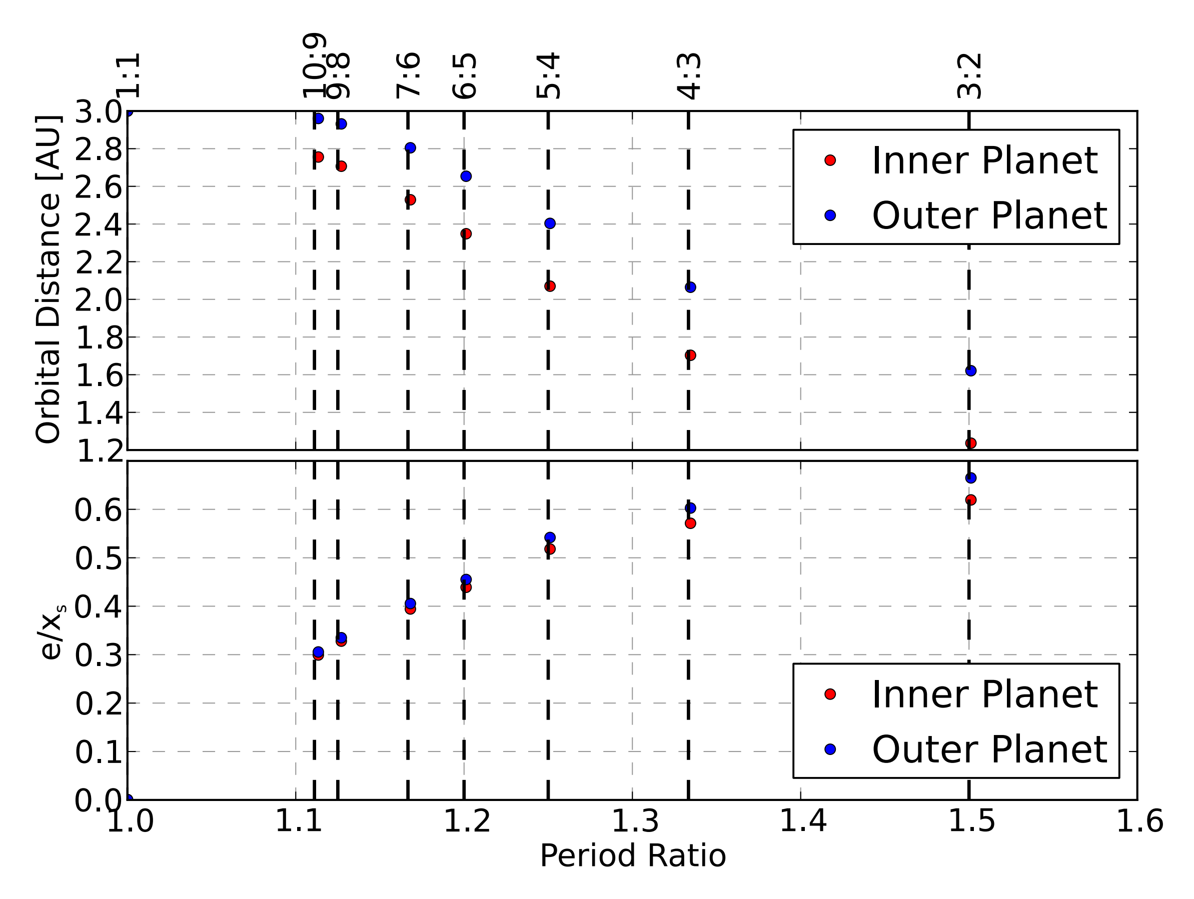


FIGURE 4.5 – demi-grand axe final (en haut) et excentricité (en bas) de deux planètes de $3\,M_\oplus$ piégées dans différentes résonances de moyen mouvement. Pour une planète de $3\,M_\oplus$, la demi-largeur de la zone fer-à-cheval vaut environ 0.014.

Afin de tester l'effet des résonances, nous avons fait une série de 100 simulations (chacune intégrée pour un million d'années), avec deux planètes de $3\,M_\oplus$ placés aléatoirement entre 1 et 10 UA, avec la même zone de convergence artificielle placée à 3 UA que précédemment.

[FIGURE 4.5] montre que dans tous les cas, les planètes sont bloquées dans des résonances allant de 11:10 à 3:2 (ordre de la résonance de 10 à 2). Conformément à ce qui était attendu, les excentricités maintenues grâce aux résonances diminuent à

mesure que l'ordre des résonance augmente, et ceci induit un décalage moins important du système planétaire par rapport à la zone de convergence à 3 UA. L'amplitude du décalage vers l'intérieur de la position d'équilibre varie de 0.2 à 1.5 UA.

Dans deux simulations, les planètes ont commencé si proches l'une de l'autre qu'elles se sont retrouvé en résonance co-orbitale (résonance 1:1). Dans ces cas là, leurs excentricités sont restées très faibles, et les deux planètes ont migré en co-orbite jusqu'à la zone de convergence nominale à 3 UA.

4.1.6 Évolution avec plus de deux planètes

On se concentre maintenant sur le cas multi-planètes. Nous avons lancé 10 simulations pour des cas avec deux, trois, cinq ou dix planètes, initialement toutes de $3\,M_\oplus$. Les planètes étaient placées aléatoirement entre 1 et 10 UA, et étaient sur des orbites de faible inclinaison et excentricité. Comme précédemment, chaque simulation a été intégrée pendant trois millions d'années dans un disque statique (sans dissipation).

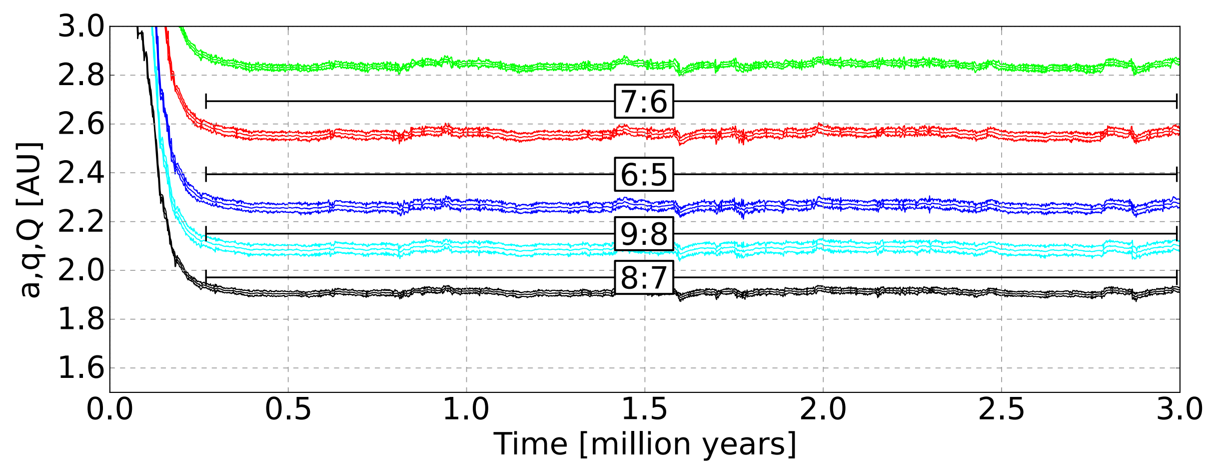
Dans les cas avec 3 planètes, on trouve 3 scénarii différents. Dans un premier cas, les 3 planètes sont prises dans une chaine de résonance et migrent vers l'intérieur toutes ensemble jusqu'à une zone d'équilibre où le couple total exercé sur le système est nul. Cette zone est typiquement entre 2 et 2.5 UA. Les excentricités des trois planètes ne sont pas identiques, la planète au centre de la chaîne de résonance est généralement la plus excitée.

Dans le deuxième scénario le plus probable, deux planètes entrent en résonance et migrent vers l'intérieur tandis que la troisième et dernière planète est trop loin dans le disque pour être elle aussi prise en résonance avec les deux autres. Cette dernière planète migre alors à la zone de convergence à 3 UA, tandis que les deux planètes internes stoppent leur migration autour d'une zone d'équilibre où le couple total exercé sur le système est nul.

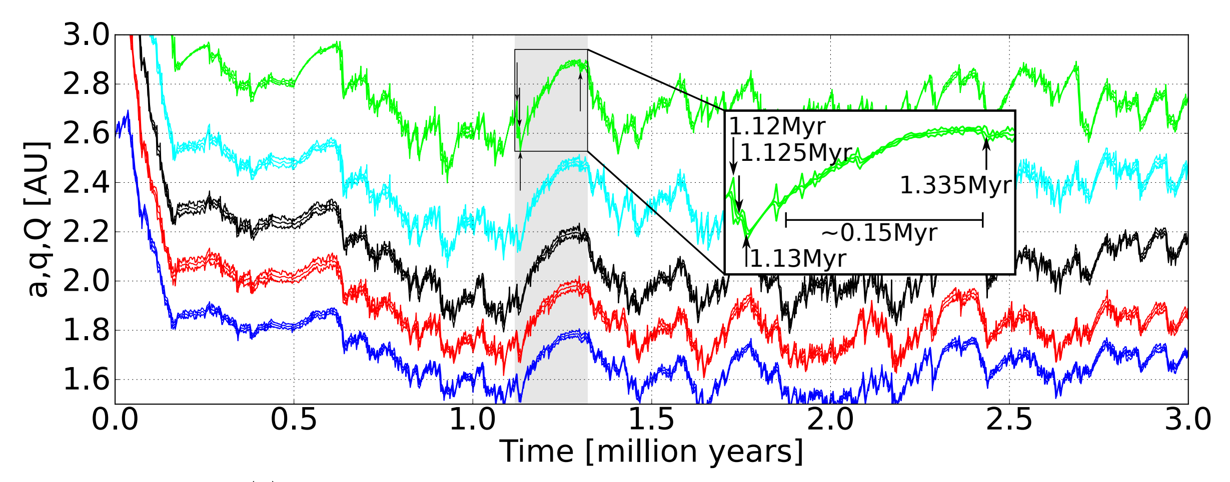
Enfin, dans un troisième scénario, une collision a lieu et le système revient à un cas à deux planètes de masse différente comme vu précédemment [FIGURE 4.4 page 72].

Pour les cas à 5 et 10 planètes, la situation est plus complexe. Les systèmes de 5 planètes forment des chaines de résonances et migrent vers l'intérieur, en direction d'une position d'équilibre où le couple total est nul. Cependant, les perturbations entre planètes ajoutent un aspect erratique à la migration des planètes. Même les systèmes les plus stables subissent des périodes d'instabilités durant lesquelles les planètes dérivent radialement dans la même direction. Ces périodes sont déclenchées par la sortie d'une résonance d'un couple de planètes à l'intérieur du système. Cette sortie de résonance se propage alors comme une perturbation à travers tout le système. L'amplitude et la fréquence de ces périodes chaotiques varient d'une simulation à l'autre.

Par exemple, dans la simulation [FIGURE 4.6a page suivante], la chaine de résonance subit plusieurs petites perturbations sans grandes conséquences car leur amplitude est faible devant la distance entre les planètes. Par opposition, les perturbations de la simulation [FIGURE 4.6b page ci-contre] sont bien plus importantes.



(a) Simulation relativement stable, même si de courts épisodes de pertubations des résonances ont lieu



(b) Simulation qui possède un comportement chaotique soutenu

FIGURE 4.6 – Deux exemples de simulations avec 5 planètes

Considérons en particulier l'épisode chaotique entre 1.1 et 1.3 million d'années dans le cas décrit [FIGURE 4.6b]. À 1.12 million d'années, les deux planètes externes sont piégées dans une résonance orbitale 4:3. Elles migrent alors vers l'intérieur, à cause de la soudaine excitation de leurs excentricités via la résonance. Cette perturbation se propage alors vers le système interne, et les excentricités de toutes les planètes augmentant soudainement, le système total se met peu à peu à migrer entièrement vers l'intérieur. 5000 ans plus tard, les deux planètes externes, encore les mêmes, sortent puis entrent de nouveau en résonance 4:3, perturbant de nouveau le système. Finalement, à 1.13 million d'années, les deux planètes externes sortent définitivement de la résonance 4:3. Retrouvant leur liberté de corps isolé, les deux planètes migrent vers la zone de convergence avec leurs excentricités de nouveau quasi nulle, la résonance n'étant plus là pour maintenir les excentricités face à l'amortissement du disque.

Sans le couple négatif des deux planètes externes, l'équilibre des couples du système global est modifié. En réaction, le système interne de trois planètes migre vers l'extérieur vers une nouvelle zone d'équilibre où le couple total exercé sur le système de trois planètes est nul. Ceci explique alors pourquoi les 5 planètes migrent brutalement vers l'extérieur.

Cependant, les deux planètes externes entrent rapidement en résonance 5:4. Pendant les quelques 0.15 million d'années suivants, elles entrent périodiquement en résonance

5:4 mais la migration vers l'extérieur continue car la plupart du temps elles ne sont pas en résonance et leur excentricité reste relativement faible. La migration globale vers l'extérieur du système s'arrête à 1.335 million d'années quand les deux planètes externes traversent la résonance 5:4 et sont piégées dans la résonance orbitale 6:5. Cette configuration stabilise le système, excite les excentricités des planètes externes et entraine la migration globale du système tout entier vers l'intérieur, marquant la fin de cet épisode chaotique.

Le reste de l'évolution est composé du même type de perturbations. Les perturbations proviennent des planètes qui entrent ou sortent des résonances, et qui se propagent alors au reste du système.

Quand les planètes sortent de résonance, leur excentricité décroit rapidement, entrainant une migration vers l'extérieur. Par opposition, les planètes entrant en résonance voient leur excentricité croitre et être maintenue à un niveau constant non nul qui entraine une migration vers l'intérieur.

Au travers de ces perturbations, des systèmes entiers subissent des migrations chaotiques relativement modestes qui illustrent la difficulté pour le système de maintenir une chaine de résonance pendant de longues périodes.

La totalité des systèmes de 5 planètes que nous avons modélisés est restée stable, dans le sens où aucune collision n'a eu lieu. Mais l'amplitude de la migration chaotique subie par le système varie d'un système à l'autre. Les deux exemples de [FIGURE 4.6 page précédente] montrent les deux cas les plus extrêmes. Les simulations avec 10 planètes étaient encore plus chaotiques et des collisions ont eu lieu.

Le point le plus important pour déterminer l'amplitude des oscillations chaotiques d'un système est l'ordre des résonances. Des résonances d'ordre p faible (par exemple 3:2) maintiennent des excentricités élevés et sont moins stables car elles sont sensibles aux variations d'excentricité. Dans le même temps, les résonances d'ordre p élevé (par exemple 11:10) maintiennent des excentricités plus faibles et sont moins sensibles aux perturbations d'excentricité.

Par exemple [FIGURE 4.6a page précédente], les perturbations sont rapidement amorties tandis que dans le panneau du bas, la fréquence des perturbations est suffisamment importante pour que le système n'ait pas le temps de les amortir et ne tendent donc pas vers une configuration stable. *Dans ce contexte, un système compact est donc plus stable qu'un système plus étendu, ce qui est exactement l'opposé d'une situation purement gravitationnelle* [Marchal and Bozis, 1982].

4.1.7 Discussion

Au travers de cette partie, nous avons montré que les planètes ne sont pas forcément piégées à la zone de convergence. Au lieu de cela, les embryons migrent rapidement vers la zone de convergence et sont piégés dans des chaînes de résonance. Ceci entraine l'augmentation brutale de leur excentricité qui reste suffisamment importante pour atténuer le couple de corotation. La zone d'équilibre de la chaîne de résonance dans le disque est déterminée par la somme des couples ressentis individuellement par les planètes (chaque

terme étant la somme d'un couple de corotation atténué et d'un couple différentiel de Lindblad non atténué). Dans la pratique, cette zone de couple nul effective est déterminée principalement par la zone de convergence décalée de la planète la plus massive de la chaîne de résonance. Ce n'est pas une vraie zone de convergence car chaque planète voit une zone de convergence différente en fonction de son excentricité.

Le décalage vers l'intérieur existe parce que les excentricités des planètes sont maintenues par les perturbations résonantes. L'amplitude de l'excentricité d'une planète est le résultat de la compétition entre l'excitation résonante et l'amortissement de l'excentricité par le disque. Pour des excentricités suffisamment importantes, un système entier de planètes en résonance peut migrer jusqu'au bord interne.

Changer les propriétés du disque pourrait ainsi changer les valeurs typiques des excentricités en modifiant le temps caractéristique d'amortissement des excentricités. Cependant, changer les propriétés du disque a aussi des conséquences sur d'autres grandeurs influençant le système, tel que le profil de couple exercé par le disque sur les planètes. En changeant les propriétés du disque, il n'est pas évident de dire quelles seront les conséquences sur l'évolution des planètes, compte tenu du fait que les planètes pourront être dans des résonances différentes, avec des excentricités et des critères de stabilité différents.

La zone de convergence dépend des paramètres du disque tels que la viscosité, les profils de température et de densité de surface [voir par exemple Paardekooper et al., 2011].Ici, nous avons utilisé un profil de disque issu de modèles complexes, mais qui reste malgré tout artificiel. Même si les résultats dépendent d'un modèle particulier, ils sont robustes aux variation du profil de couple en fonction de la distance orbitale, tant qu'une zone de convergence existe pour rassembler les embryons au cours de l'évolution.

Dans un disque plus réaliste, on s'attend à quelques différences. En premier lieu, il pourrait exister plusieurs zones de convergence dans un même disque ayant pour origine des processus physiques différents [Lyra et al., 2010, Hasegawa and Pudritz, 2011].

Ensuite, des zones de convergences dépendantes de la masse des planètes peuvent exister dans les parties externes du disque, où ce mécanisme devrait être moins efficace compte tenu du fait que dans de telles zones de convergence, les embryons de masse différentes ne migrent pas à la même position dans le disque. Dans de telles zones, il pourrait être beaucoup plus difficile de former les chaînes de résonances essentielles pour notre mécanisme.

Troisièmement, alors que le disque se dissipe, le profil de couple et la position des zones de convergences sont aussi altérées [Lyra et al., 2010, Horn et al., 2012].

Enfin, la turbulence est censée être commune dans les disques protoplanétaires [Armitage, 2011]. Même si la turbulence n'affecte pas l'évolution à long terme d'une planète isolée dans un disque radiatif [Pierens et al., 2012], on s'attend à ce qu'elle modifie la capture en résonance et l'évolution des excentricités [voir Pierens et al., 2011].

4.2 Formation des super-Terres chaudes

Les détections d'exoplanètes par vitesse radiale et transit montrent que 30 à 50% des étoiles de la séquence principale possèdent au moins une planète de moins de 10 $M_\oplus$ sur des orbites comprises entre 85 et 100 jours [Mayor et al., 2011, Howard et al., 2010, Howard et al., 2012, Fressin et al., 2013]. De plus, les super-Terres ($1 - 10\,M_\oplus$) chaudes sont préférentiellement détectées dans des systèmes multiples [Udry and Santos, 2007, Lissauer et al., 2011]. Pourtant, même si ces systèmes peuvent nous sembler bien plus compacts que le système solaire au premier abord, d'un point de vue gravitationnel, ils possèdent à peu près le même espacement en terme de rapport de période et de rayon de Hill mutuel [Fang and Margot, 2013].

[FIGURE 4.7] montre les propriétés statistiques des planètes détectées dans des systèmes multiples, incluant les candidats Kepler.

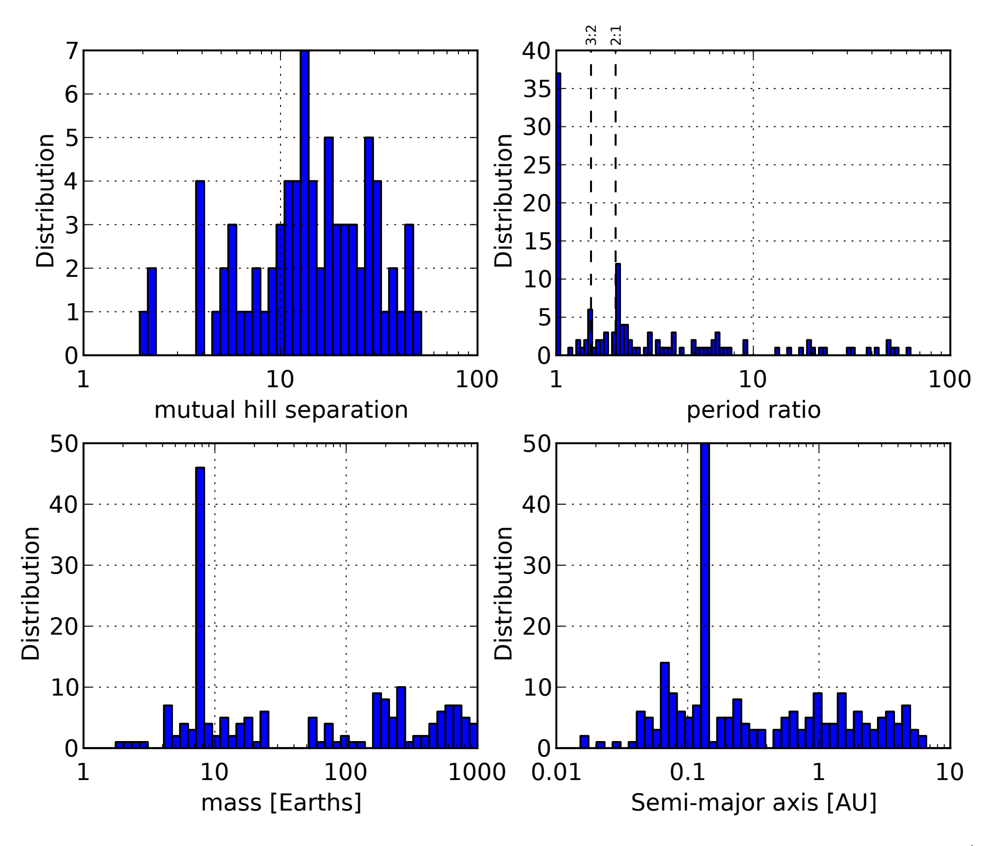


FIGURE 4.7 – Propriétés des exoplanètes détectées dans des systèmes multiples ($N \geqslant 2$). Données (01/01/2013) : http://exoplanets.org/

Plusieurs mécanismes de formations tentent d'expliquer la présence de super Terres, ces planètes ayant une masse de 1 à 10 $M_\oplus$, tout en étant compatible avec les contraintes observationnelles. Deux modèles principaux peuvent à ce jour expliquer la formation de ces planètes.

Le premier modèle, la « formation *in-situ* » [Chiang and Laughlin, 2013] n'est possible que si le disque est suffisamment massif localement pour permettre la formation de planète de plusieurs masses terrestres. La formation est alors semblable à celle des planètes telluriques dans le système solaire [Wetherill, 1990, Kenyon and Bromley, 2006].

Le deuxième modèle implique la migration de type 1 [Terquem and Papaloizou, 2007]. Dans ce cas là, il n'est pas nécessaire de supposer un disque extrêmement massif afin de former plusieurs super terres.

Les deux modèles permettent d'expliquer l'espacement observé. Le modèle impliquant la migration de type 1 prédit aussi que les systèmes multiples vont être proches de résonances de moyen mouvement. On peut en effet observer des pics sur [FIGURE 4.7 page précédente] autour des résonances 3:2 et 2:1. Dans le cas de la formation *in-situ*, on s'attend à des planètes assez pauvres en eau, alors qu'en impliquant la migration, la variété de composition des planètes ainsi formées est beaucoup plus grande [Raymond et al., 2008].

Il existe de plus d'autres modèles, impliquant des résonances séculaires avec des planètes géantes plus loin dans le système, la photo-évaporation de super Neptunes, circularisation des planètes excentriques. Ces modèles sont présentés et comparés dans Raymond et al. [2008] et ne sont pas discutés ici.

4.2.1 Modèle

Nous utilisons les formules de Paardekooper et al. [2011] afin de modéliser la migration de type I. Cette migration est implémentée de manière cohérente dans tout le disque. Le bord interne est simplement modélisé par une diminution brutale de la densité de surface, mais le couple induit est lui toujours calculé selon les mêmes formules.

L'amortissement de l'excentricité et de l'inclinaison est lui issu des formules de Cresswell and Nelson [2008].

Plus de détails sur le modèle utilisé sont disponibles [§ 2 page 47].

Le disque utilisé possède les paramètres suivants [1] :

$$\begin{aligned}
b/h &= 0.4 \\
\gamma &= 7/5 \\
\mu &= 2.35 \\
\alpha &= 5 \cdot 10^{-3} \\
T_\star &= 5700\,\mathrm{K} \\
R_\star &= 4.65 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{AU} \\
\text{Disk Albedo} &= 0.5 \\
\Sigma(R) &= 300 \cdot R^{-1/2}\,\mathrm{g/cm^2}
\end{aligned}$$

La migration d'une planète dans ce disque est représentée [FIGURE 4.8 page suivante]. Ce graphique permet de visualiser les zones de stabilités et l'évolution future d'une planète dans un disque en fonction de sa masse et de sa position initiale. Quand le couple est positif, la planète migre vers l'extérieur (vers la droite du graphique). Quand le couple est négatif, la planète migre vers l'intérieur (vers la gauche du graphique). Au cours de sa migration, si la planète rencontre une ligne noire, cela signifie qu'elle s'arrête là, car le couple de migration est nul. Cette lecture n'est possible que pour des

1. voir [§ A.1 page 97] pour la signification des symboles usuels

planètes isolées dont l'excentricité est faible. En effet, les perturbations induites par d'autres planètes peuvent modifier l'état final prédit par un tel diagramme, de même que l'amortissement du couple de corotation par l'excentricité d'une planète, qui va lui totalement changer le couple de migration ressenti par la planète.

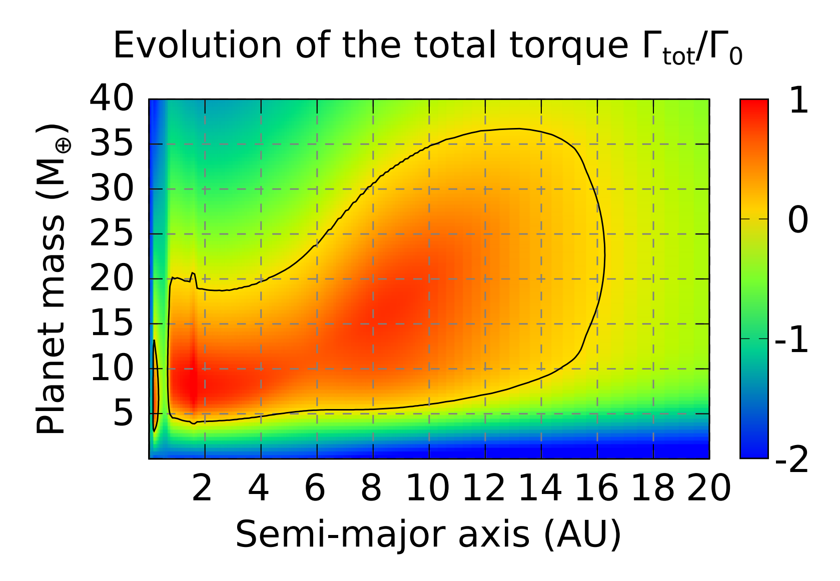


FIGURE 4.8 – Cette carte représente l'effet du disque sur une planète en fonction de sa position en abscisse et de sa masse en ordonnée. La ligne noire représente la zone de couple nul, c'est à dire une zone où la migration de la planète s'arrête. Cette carte n'est valable que pour des planètes sur des orbites circulaires ($e \ll 1$), c'est à dire quand l'amortissement du couple de corotation par l'excentricité est négligeable.

Un zoom sur le bord interne du disque [FIGURE 4.9 page suivante] montre la zone de couple positif juste avant le bord interne, dû à la décroissance rapide de la densité de surface et l'important couple de corotation qu'il engendre.

4.2.2 Conditions initiales

Initialement dans le système, on génère des embryons dont la masse varie de 0.1 à $2\,M_\oplus$, pour une masse totale allant de 30 à $100\,M_\oplus$. Des masses aléatoires différentes d'un embryon à l'autre permettent d'éviter les biais dûs aux masses égales. En effet, deux embryons de même masse migrent à la même vitesse, ce qui n'a aucune raison physique de se produire systématiquement dans un disque. Deux planètes migrant à la même vitesse ne peuvent pas entrer en collision, ou se placer en résonance, deux évènements cruciaux pour notre mécanisme de formation.

De plus, quand deux corps sont en résonance, il y a un effet du rapport de masse sur les niveaux réciproques d'excentricité. Des masses égales maximisent les perturbations gravitationnelle de deux corps en résonance [§ 4.1.4 page 71]. Quand ce n'est pas le cas, le plus gros corps est celui qui a l'excentricité la plus faible, mais c'est aussi celui qui impose la stabilisation du système de deux corps là où lui ressent le couple du disque le plus faible.

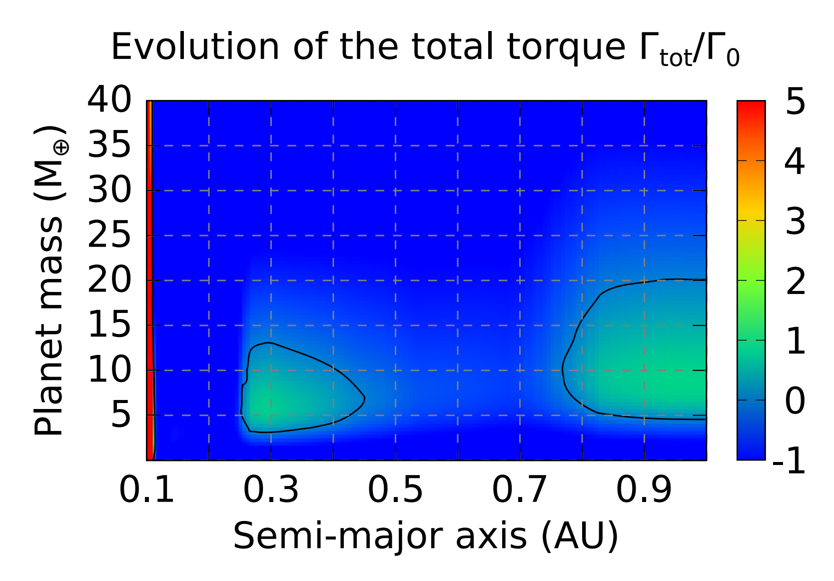


FIGURE 4.9 – Cette carte représente la migration d'une planète près du bord interne en fonction de sa position en abscisse et de sa masse en ordonnée. La ligne noire représente la zone de couple nul, c'est à dire une zone où la migration de la planète s'arrête. Cette carte n'est valable que pour des planètes sur des orbites circulaires ($e \ll 1$), c'est à dire quand l'amortissement du couple de corotation par l'excentricité est négligeable.

4.2.3 Systèmes possibles

En dessous d'une certaine masse limite qui dépend des paramètres du disque mais qui se situe généralement entre 2 et 10 $M_\oplus$, les planètes migrent toutes vers l'intérieur, quelle que soit leur position initiale dans le disque. Pour le disque considéré ici [FIGURE 4.8 page précédente], cette limite se situe environ à 4 $M_\oplus$.

L'évolution peut suivre deux cas de figures différents, mais non exclusifs.

Dans un premier cas, les embryons migrent vers l'intérieur et il n'y a pas suffisamment de collisions durant leur migration pour qu'ils puissent migrer vers l'extérieur à un quelconque moment. On se trouve alors dans le cas d'une formation au bord interne décrite [§ 4.2.3].

Dans un deuxième cas, une ou plusieurs planètes grossissent suffisamment par collision pour ressentir un couple positif vers l'extérieur. Plusieurs sous-cas de figures sont alors possibles, décrits [§ 4.2.3 page suivante].

Formation au bord interne : systèmes compacts

Des embryons migrent vers l'intérieur, de manière isolée ou par vague de sous-systèmes en résonance.

En raison de la diminution rapide de la densité de surface près du bord interne, la planète ressent un fort couple positif principalement dû au couple de corotation [FIGURE 4.9].

Un système de planètes en résonance se forme alors, les planètes internes migrant vers l'extérieur, les planètes externes migrant elles vers l'intérieur. Ce système en résonance va naturellement chercher à s'équilibrer. Cet équilibre est dicté par le fait que

chaque planète ressent un couple non nul, elle possède aussi une excentricité à cause des autres corps en résonance, et ce système compact est continuellement soumis à des perturbations d'autant plus importantes que le nombre de corps en résonance est grand.

Des collisions et réarrangements ont alors lieu, diminuant ainsi le nombre de corps et augmentant la stabilité du système global.

Certaines planètes peuvent entrer dans la cavité interne du disque, poussées par le système non encore stabilisé. Elles ne perçoivent alors plus aucun effet du disque, que ce soit la migration ou l'amortissement de l'excentricité et de l'inclinaison. Dans ce cas de figure, elles peuvent ne plus être en résonance avec le reste du système.

Même si durant l'évolution, il est possible que la planète la plus interne sorte du disque, entre en collision avec l'étoile centrale, ou soit ejectée, il est très facile de maintenir un système compact au bord interne en raison du fort couple positif qui va s'exercer sur le planète la plus interne du système alors que ce dernier cherche à migrer vers l'intérieur.

Migration vers l'extérieur : candidats de planètes géantes

Lors de la migration vers l'intérieur de tous les embryons, il est possible pour une planète de grossir suffisamment vite pour ressentir un couple positif. Ce couple positif est censé entrainer une migration vers l'extérieur de la planète, ce serait systématiquement le cas si cette dernière était isolée. Mais dans son voisinage se trouvent d'autres planètes qui elles migrent vers l'intérieur. Très rapidement la planète va entrer en résonance avec un embryon planétaire qui migre vers l'intérieur.

L'effet décrit [§ 4.1 page 67] s'applique alors. La migration différentielle et le rapport de masse ont ici une importance capitale. Si la différence de vitesse est trop grande, alors les deux planètes ne peuvent pas former un système en résonance. La résonance est rapidement cassée et les deux corps continuent leur migration. Ceci est d'autant plus vrai si le rapport de masse est important, car la brève augmentation d'excentricité qui a lieu lors d'une capture en résonance n'aura que peu d'effet sur la plus grosse planète. Cette dernière sera très peu sensible aux perturbations gravitationnelle de son compagnon résonant et continuera sa migration vers l'extérieur sans quasiment ralentir.

[Figure 4.10 page ci-contre] illustre ce scénario. Cette dernière atteint par collisions la masse de $6\,M_\oplus$ au bout de 300000 ans alors qu'elle se trouve à 1.2 AU ce qui est suffisant pour qu'elle puisse migrer vers l'extérieur. Cependant, les perturbations gravitationnelles des autres corps qui eux migrent vers l'intérieur l'empêchent de se comporter comme une planète isolée. Dans les quelques dizaines de milliers d'années suivants, 3 nouvelles collisions ont lieu. La planète fait maintenant $13\,M_\oplus$. La différence de masse avec ses voisins immédiats lui permet de migrer vers l'extérieur malgré les perturbations résonantes qui augmentent son excentricité. Comme détaillé [§ 4.1.4 page 71], plus le rapport de masse est important, et plus la migration est dominée par la planète massive. Dans un système résonant avec rapport de masse élevé, la petite planète a une excentricité importante, son couple de corotation est fortement atténué, ce qui n'est pas le cas de la planète massive. Cette dernière migre comme si elle n'était pas en résonance, et à partir de là, soit elle emporte le système avec elle, soit, comme dans le cas présent, la

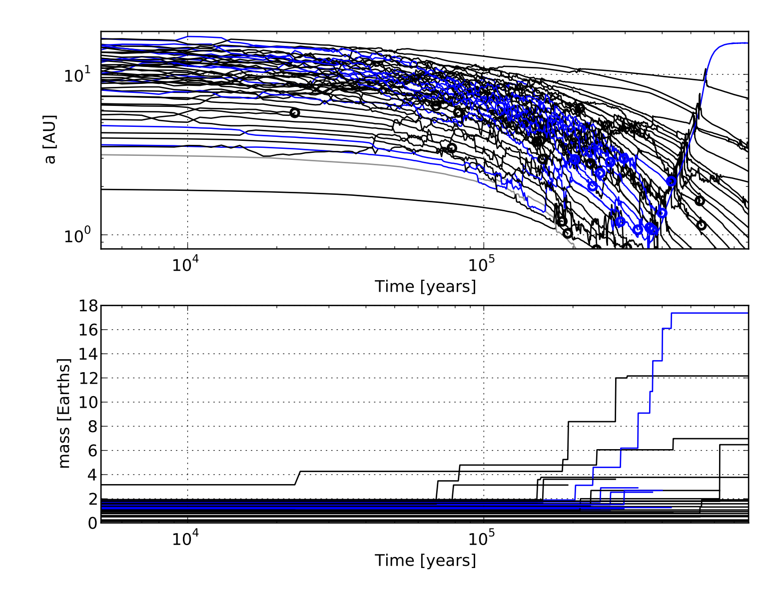


FIGURE 4.10 – Formation d'un cœur de planète géante. La planète dont l'évolution est notée en bleu devient massive suffisamment vite pour pouvoir migrer vers l'extérieur. Les cercles représentent des collisions. Les autres courbes bleu qui disparaissent sont des embryons qui rentrent en collision avec la planète considérée et fusionnent avec elle.

résonance fini par se briser et les deux planètes continuent leur migration séparément.

Dans la suite de la simulation, la planète est trop massive pour être arrêtée. La planète massive migrant vers l'extérieur, elle capture en résonance un embryon de faible masse. Les deux planètes migrent alors vers l'extérieur, emportées par la migration de la planète la plus massive. Pourtant le système n'est pas stable. Les perturbations finissent par briser le système de deux planètes qui a alors deux possibilités. Soit une collision survient, augmentant sa masse, soit la brève rencontre se termine par un échange d'orbite. Dans cet exemple, les deux planètes continuent leur migration séparément.

À la fin de la simulation, la planète de $17.4\,M_\oplus$ est à sa zone de couple nul, à 15.7 AU.

Il est aussi possible pour la planète migrant vers l'extérieur de capturer en résonance une planète dans une configuration stable, comme le montre [FIGURE 4.11 page suivante].

Dans cette même simulation, deux autres planètes massives sont formées (en vert et bleu) au bord interne, mais elles n'étaient pas massives suffisamment tôt pour migrer vers l'intérieur. Ainsi le même mécanisme, par un simple effet de timing, permet de créer soit des systèmes compacts de super terres chaudes, soit des embryons de planète géante qui pourront accréter du gaz dans les parties externes du disques, au delà de la ligne des glaces.

On a enfin un troisième et dernier cas où une planète grossit suffisamment rapidement pour migrer vers l'extérieur, mais est entrainée vers l'intérieur en étant capturée en résonance avec une planète de l'ordre de sa propre masse ce qui inverse son sens de migration.

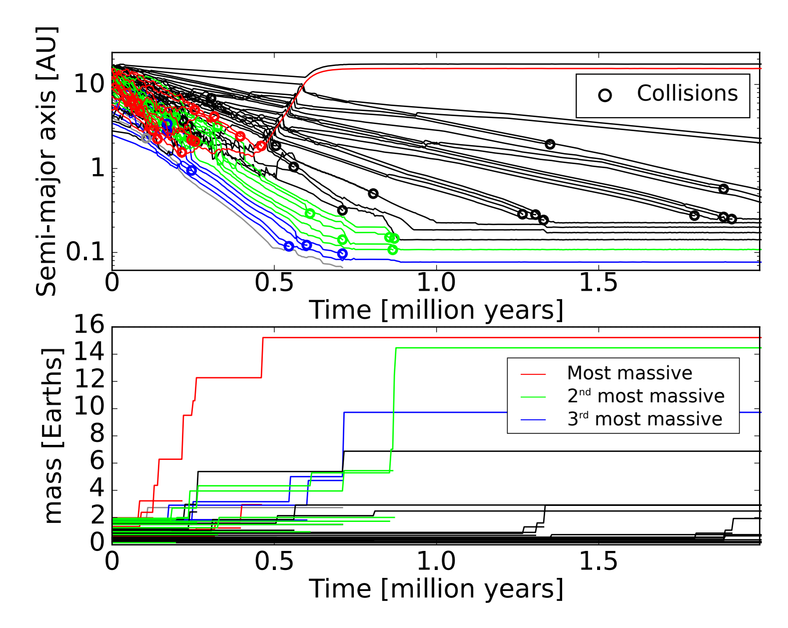


FIGURE 4.11 – Formation d'un cœur de planète géante (en rouge) qui capture en résonance une planète de faible masse migrant très lentement vers l'intérieur.

4.2.4 Discussion

Quand les embryons sont plus petits qu'une certaine masse critique dépendant des propriétés du disque, la migration est systématiquement vers l'intérieur. Un système compact de planètes qui grossissent par collisions se forme alors au bord interne qui retient ce système par le fort couple de corotation positif qui s'exerce juste avant le bord interne en raison de la forte décroissante de la densité de surface [Masset et al., 2006].

Pendant la migration vers l'intérieur, si un embryon grossit suffisamment vite, il peut commencer à migrer vers l'intérieur. Durant cette migration, des résonances vont se former avec les corps qui migrent pour la plupart vers l'intérieur. Par excitation résonante, la migration vers l'extérieur peut être ralentie voire stoppée, et les planètes peuvent de nouveau migrer vers l'intérieur.

Pourtant, dans certains cas, une planète suffisamment massive peut migrer vers l'intérieur, emprisonnant des corps plus petits dans des résonances orbitales, avant de se placer à une zone de couple nul dans les parties externes du disque (dans celui présenté ici, vers 15 UA.

Ce mécanisme peut alors former conjointement des systèmes compacts de super terres, proches du bord interne, ou des cœurs de planètes géantes dans les parties externes, avec possiblement des planètes beaucoup plus petites en résonance.

La seule différence entre le cas système compact et le cas planète géante est le timing.

En effet, il y a deux points importants. D'une part les embryons de faibles masses migrent vers l'intérieur quelle que soit leur position initiale. De plus, les embryons en dessous d'une certaine distance migrent tous vers l'intérieur quelle que soit leur masse. Les planètes qui ne répondent pas à ces critères migreront inexorablement vers le bord interne.

Il faut donc dans le cas présent qu'un embryon atteigne la masse critique de $5\,M_\oplus$ au

delà de 1 UA pour pouvoir migrer vers l'extérieur et devenir un cœur de planète géante.

Quand nous parlons ici de système compact, il faut garder à l'esprit que le disque est toujours présent. Nous ne faisons pas évoluer le disque au cours du temps, la dissipation aura donc certainement un effet. Les résonances, présentes systématiquement au bord interne à cause de la migration, auront des chances de disparaître si des déstabilisations surviennent pendant la dissipation. En effet, le système n'est stable qu'à cause de la dissipation induite par le disque de gaz. Pourtant, il est difficile de conclure car la manière dont le disque est dissipé aura une incidence sur la configuration finale du système.

Ensuite, nous n'avons pas tenu compte de l'accrétion de gaz sur les super terres. D'un coté des planètes de plusieurs masses terrestres vont pouvoir accréter du gaz, mais la proximité de ces planètes à leur étoile centrale pourra avoir une effet dissipatif sur leur atmosphère.

Ensuite, Terquem and Papaloizou [2007] ont montré que la formation de systèmes compacts est possible. Ici, le modèle que nous avons repris est très similaire à leur modèle, à ceci près que nous avons modélisé la migration de manière consistante avec le disque (avec possibilité de couple positif et négatif en fonction de la masse et de la position de la planète).

Ce que notre modèle montre en plus du modèle de Terquem and Papaloizou [2007], c'est que même avec migration vers l'extérieur, des systèmes compacts peuvent se former au bord interne, avec des propriétés très similaires aux propriétés des systèmes observés. Mais de plus, dans le même modèle, la formation de cœurs de planètes géantes dans les parties externes est possible.

4.3 Effets des paramètres du disque

Jusqu'à présent, je me suis concentré sur des cas particuliers. Dans le cas de la formation de super-Terres, je n'ai montré qu'un seul disque [§ 4.2 page 78]. Dans le cas du décalage de la zone de convergence, j'ai montré un disque artificiel modélisant une zone de convergence [§ 4.1 page 67].

Je vais montrer dans les paragraphes qui suivent que la migration est extrêmement sensible aux paramètres du disque.

Kretke and Lin [2012] ont déjà étudié l'influence des paramètres du disque sur la migration. Cependant, s'ils ont inclus des effets fins sur le bord interne et la migration, l'opacité est par exemple une simple loi de puissance. Nous montrerons que l'opacité est un paramètre sensible du modèle et qu'il est important de la modéliser le plus finement possible.

Bitsch et al. [2013] ont étudié en particulier l'effet de la viscosité ν et l'indice adiabatique γ sur la migration dans le disque, au travers de simulations 3D.

4.3.1 Viscosité du disque

Le couple de migration est sensible à la valeur de la viscosité ν. En particulier, c'est le temps de diffusion visqueux qui modifie le niveau de saturation de la zone de corotation, et donc la valeur du couple de corotation.

Pourtant, la carte de migration possède une deuxième sensibilité au modèle de viscosité. Selon que l'on choisi une viscosité constante ou une prescription alpha dans laquelle la viscosité ν croit avec la distance, cela a une influence sur l'évolution du couple en fonction de la position dans le disque.

4.3.2 Profil de densité de surface

4.3.3 Profil de température

4.3.4 Masse du disque

4.3.5 Table d'opacité

Le modèle utilisé pour déterminer les opacités dans un disque est bien souvent à peine nommé, et très peu discuté. Pourtant, l'opacité est une grandeur physique qui a une influence très importante sur la physique du disque et la migration des planètes.

Dans toute la suite, quand je parlerai de table d'opacité, je désigne le fait d'utiliser un tableau à deux dimensions, proposant des valeurs de l'opacité pour différentes températures et densité. La table d'opacité est donc définie ici par opposition à ce que j'appelle des lois d'opacité, modèles dans lesquels l'opacité est définie par des lois de puissance, fonction de la température et de la densité, dans différents régimes de température et densité.

Ainsi une table d'opacité est simplement une tabulation de l'opacité, alors qu'une loi d'opacité correspond à un ajustement par une loi de puissance.

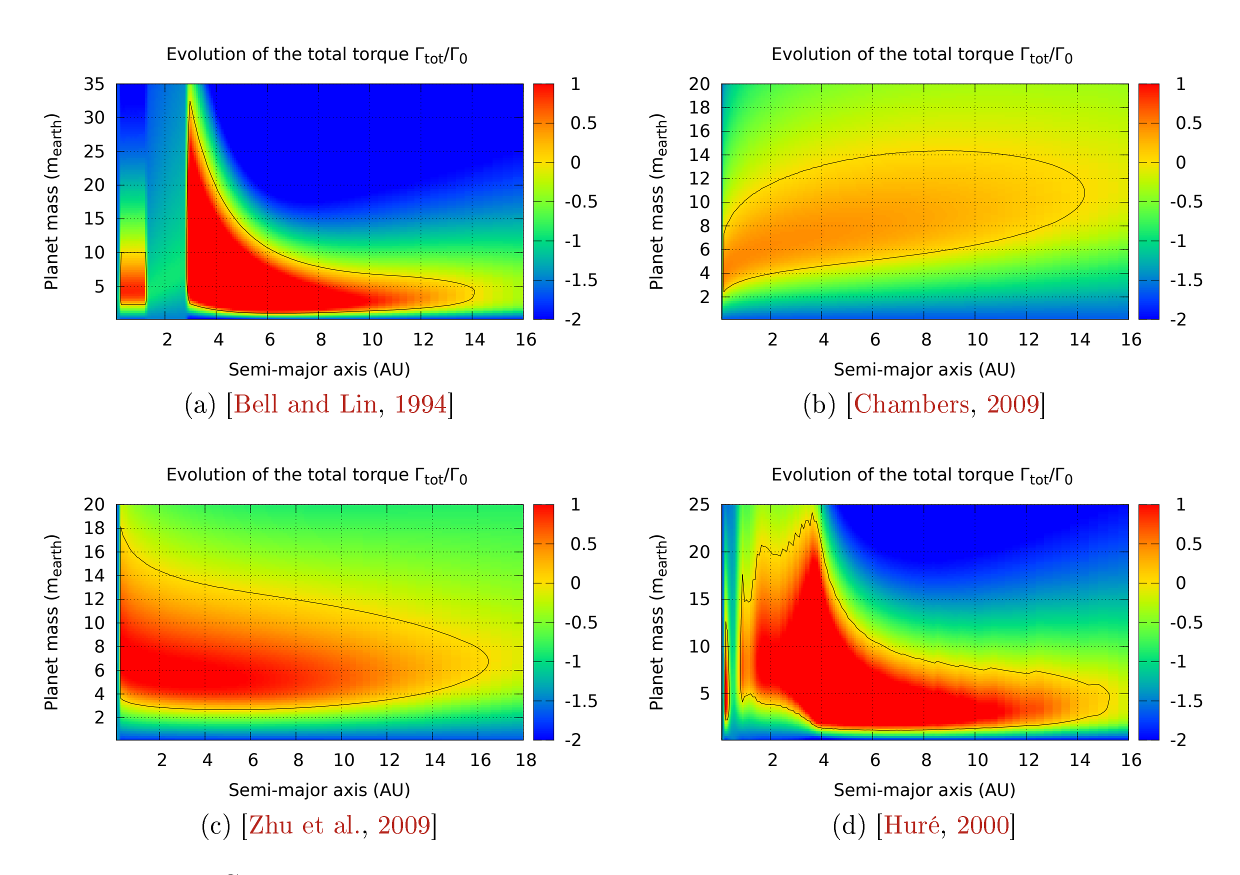
Généralement, c'est la loi d'opacité Bell and Lin [1994] qui est utilisée, aussi bien dans les simulations hydrodynamiques 2D et 3D que dans les simulations N-corps.

Une autre loi d'opacité existante est Zhu et al. [2009], loi quelque peu améliorée par rapport à Bell and Lin [1994], l'augmentation des capacités des ordinateurs ayant permis de faire des calculs plus précis.

De plus, nous utilisons aussi le modèle d'opacité très simple décrit par Chambers [2009] dans lequel l'opacité est constante et égale à $\kappa = 3$ jusqu'à 1380 K où une transition s'opère vers une loi de puissance. Ce modèle nous permet de voir l'effet d'un modèle par rapport à un cas où l'opacité est constante. En effet, dans le cas d'un disque protoplanétaire, seules les régions les plus internes sont susceptibles d'atteindre des températures supérieures à 1000 K.

Enfin, j'ai souhaité comparer ces deux lois d'opacité avec une table d'opacité, Huré [2000]. Cette table d'opacité de Rosseland correspond à la composition suivante $X =$

0.70, $Y = 0.28$ et $Z = 0.02$ et est basée sur Seaton et al. [1994], Alexander and Ferguson [1994], Henning and Stognienko [1996].



(a) [Bell and Lin, 1994]

(b) [Chambers, 2009]

(c) [Zhu et al., 2009]

(d) [Huré, 2000]

FIGURE 4.12 – Cartes de migration obtenues pour le même disque, mais avec un modèle d'opacité différent. L'irradiation ayant un effet important sur la carte de migration, elle a été désactivée ici afin de mieux mettre en valeur les différences entre les modèles d'opacités. Notez que les échelles ne sont pas identiques.

[FIGURE 4.3.5] montre les différentes cartes de migration que l'on obtient avec le même disque de référence mais pour les 4 modèles d'opacité considérés.

On considère la carte avec la table d'opacité [FIGURE 4.12d] comme référence. En effet, les lois d'opacités utilisent une table d'opacité en amont à partir de laquelle elles déduisent des lois de puissances par morceau afin de reproduire au mieux la table d'opacité. La table d'opacité se traduit par une carte de migration complexe où chaque aspect de la table se traduit sur la carte par une variation brutale de la migration. L'opacité a une grande influence sur la migration, que ce soit au niveau du temps de diffusion qui régi la saturation que vis à vis du profil de température.

L'importance de l'opacité se manifeste au travers du temps de diffusion radiatif. Une opacité plus grande induit un temps de diffusion radiatif plus important.

On constate par ailleurs que les lois d'opacité lissent fortement la carte de migration (comparer la carte pour la table d'opacité d'Huré [2000] avec les 3 autres). Notons en particulier une transition d'opacité dans Bell and Lin [1994] qui n'existe pas dans les autres modèles et qui entraine une zone de convergence indépendante de la masse (dans le cas présent à 1.3 UA). Cette transition d'opacité, liée à l'évaporation des grains de glace d'eau, n'est en effet introduite que dans ce modèle, les autres modèles considérant

qu'elle n'illustre aucune réalité physique

Le modèle d'opacité choisi a donc une grande influence sur la carte de migration et donc le comportement des planètes dans un disque. À l'heure actuelle, compte tenu de la puissance des ordinateurs, le choix d'une loi d'opacité par rapport à une table d'opacité ne se justifie absolument plus. En effet, les approximations supplémentaires qu'engendrent une loi d'opacité comparé à une table brute ne sont absolument pas compensées par le gain de temps de calcul que cela engendre. Dans mon cas, la routine implémentant la table d'opacité est même plus rapide que la routine pour les lois d'opacités. La seule différence est qu'il faut stocker un tableau contenant la table d'opacité, ce qui n'est absolument pas limitatif avec les ordinateurs actuels.

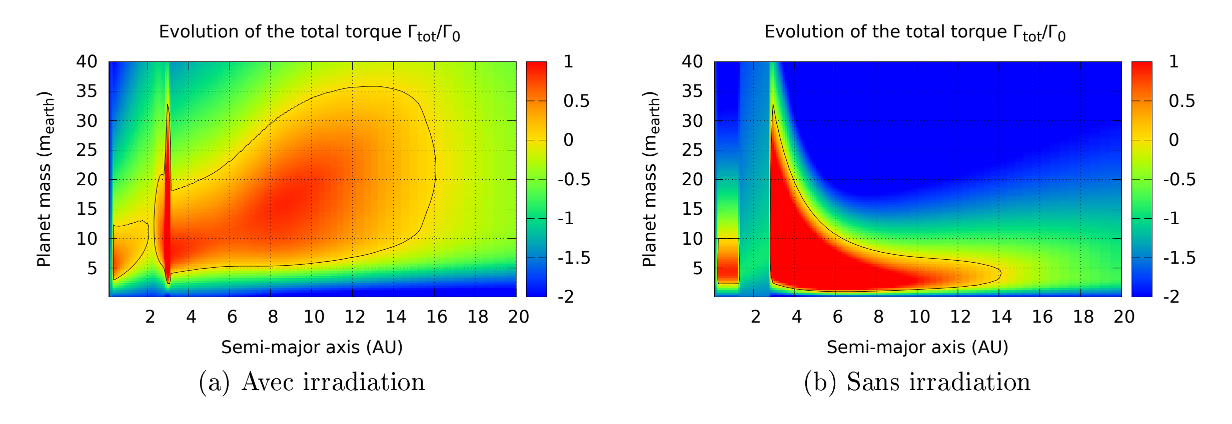
Les modèles d'opacités étant une source d'incertitude pour toutes les simulations numériques, que ce soit des simulations N-corps ou des simulations hydrodynamiques 2D ou 3D, je pense qu'il est important d'apporter une attention particulière au choix du modèle.

À l'heure actuelle, dans le cas particulier de la migration planétaire, la valeur de l'opacité ainsi que la pente qu'elle engendre sur le profil de température sont des sources importantes d'incertitudes. Il pourrait être intéressant de réaliser une étude d'envergure afin de réaliser une table d'opacité tenant compte des nouvelles capacités des ordinateurs, afin de coller au mieux à ce que l'on sait des disques.

Il restera pourtant toujours des incertitudes quant aux propriétés des poussières, taille et quantité, ainsi que son évolution au cours du temps. La poussière étant une source majeure d'opacité dans le disque, son évolution au cours du temps doit avoir une influence toute aussi majeure que nous ne pouvons que négliger à l'heure actuelle malgré les implications que cela peut avoir sur la formation des planètes.

4.3.6 Effet de l'irradiation

En choisissant ou non d'inclure l'irradiation dans l'équation de l'énergie permettant de calculer le profil de température, on change de manière importante la carte de migration.



(a) Avec irradiation

(b) Sans irradiation

FIGURE 4.13 – Influence de l'irradiation sur la carte de migration à travers le profil de température. Afin de visualiser plus facilement les effets, Bell and Lin [1994] a été utilisé pour l'opacité.

Afin de visualiser l'effet de l'irradiation, nous avons utilisé les lois d'opacités de Bell and Lin [1994]. En effet, le principal effet de l'irradiation est de lisser le profil de température. Sans irradiation, une transition d'opacité marquée comme celles de Bell and Lin [1994] se répercute directement sur le profil de température [FIGURE 4.14]. On voit donc apparaître des zone de convergences dues à des transitions d'opacités qui sont totalement déformées par l'irradiation comme on peut le constater sur [FIGURE 4.13 page ci-contre].

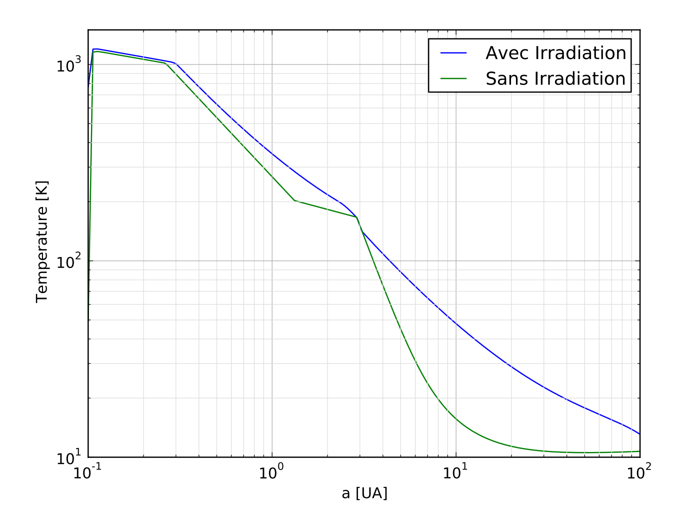


FIGURE 4.14 – Profil de température avec ou sans irradiation. L'irradiation est calculée avec les paramètres $T_\star = 5700\,\mathrm{K}$, $R_\star = 4.65 \cdot 10^-3\,\mathrm{AU}$, disk albedo $\varepsilon = 0.5$.

Ainsi, sans irradiation, les deux transitions d'opacités à 1.3 et 2.9 UA induisent un changement brutal de la pente du profil de température, ce qui a pour effet de changer le sens de migration (de positif à négatif, puis l'inverse).

Dans les parties externes, l'irradiation a pour effet de diminuer la pente du profil de température qui tend vers un profil en $R^{-0.5}$ quand le disque est purement passif.

4.3.7 Longueur de lissage

Dans les modèles numériques des disques protoplanétaires, le potentiel gravitationnel doit être modifié afin ne pas diverger aux très faibles distances mutuelles. En particulier, des problèmes peuvent survenir quand on modélise des objets, tels des planètes, par des masses ponctuelles.

De même, dans le cas de simulations hydrodynamiques 2D, le modèle se base sur des moyennes azimutales des différentes quantités physiques. Le lissage du potentiel gravitationnel est ici nécessaire afin de diluer la densité de surface et reproduire au mieux l'aspect 3D du disque. On comprend alors aisément que la longueur de lissage va être reliée à l'échelle de hauteur du disque qui est elle aussi une mesure de l'extension azimutale du disque.

Plusieurs groupes ont cherché à étudier la longueur de lissage en détail, en particulier pour trouver la valeur optimale à utiliser [Huré and Pierens, 2009, Müller et al., 2012].

Ces études cherchent à trouver la longueur de lissage qui permet de reproduire les simulations 3D à l'aide des simulations 2D.

Une longueur de lissage relativement importante $b/h = 0.75$ est nécessaire pour reproduire correctement le couple de Lindblad [Masset, 2002]. Pour le couple de corotation, la zone fer-à-cheval étant très proche de la planète, ce dernier est extrêmement sensible à la longueur de lissage. En effet, Masset [2002] a montré que dans certains cas le couple de corotation pouvait être plus d'un ordre de grandeur plus important en fonction de la valeur du lissage que l'on applique. La valeur préconisée est alors autour de $b/h \sim 0.5 - 0.6$. Ainsi, Masset [2002] conclue qu'il est peu probable de trouver une valeur optimale pour la longueur de lissage, les valeurs optimales pour les couples de Lindblad et de corotation étant incompatible.

Müller et al. [2012] suggère d'utiliser une longueur de lissage $b/h = 0.7$ tout en notant que des différences notables subsistent avec les simulations 3D.

Huré and Pierens [2009], en étudiant des disques sans planètes conseillent la plage de valeur suivante $0.13 \lesssim b/h \lesssim 0.29$.

Paardekooper et al. [2010, 2011] et les formules analytiques ou semi-analytiques qu'ils fournissent pour décrire la migration de type I ((1.50 page 38), (1.60 page 42), (1.61 page 42)) introduisent une telle dépendance.

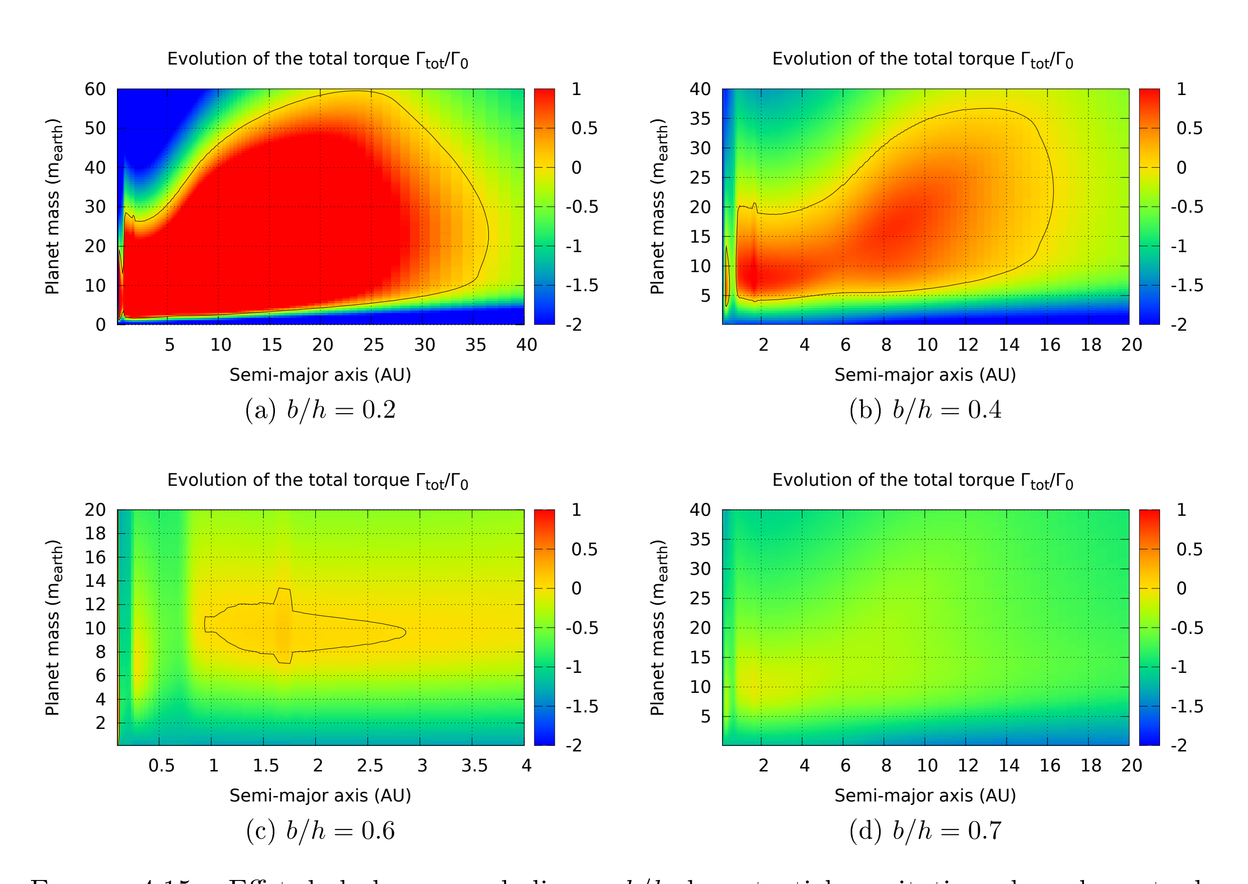
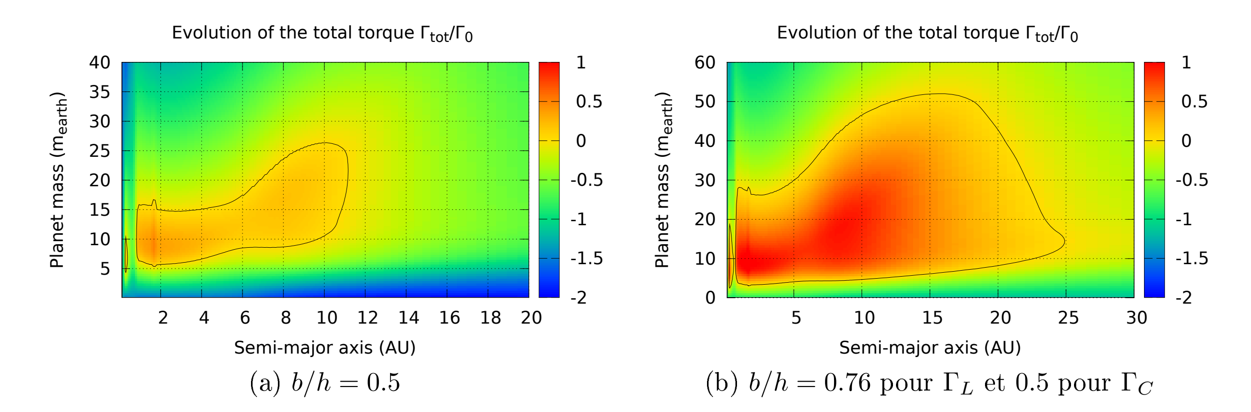


FIGURE 4.15 – Effet de la longueur de lissage b/h du potentiel gravitationnel sur la carte de migration du disque de référence. Ici seule la longueur de lissage change. Pour plus de détails sur les cartes de migration [§ 3.2.3 page 65].

[FIGURE 4.15] montre qu'en fonction de la longueur de lissage, on peut se trouver

dans un cas où il y a migration systématique vers l'intérieur ($b/h = 0.7$) ou migration quasi systématique vers l'extérieur ($b/h = 0.2$). Si une valeur de 0.2 semble peu réaliste au regard de la migration planétaire [Müller et al., 2012], il est courant de voir des simulations effectuées avec $b/h = 0.3 - 0.6$ [Masset, 2002, de Val-Borro et al., 2006, Paardekooper and Papaloizou, 2009].

Une longueur de lissage $0.6 \leqslant b/h \leqslant 0.76$ sous estime le couple de corotation et sur-estime le couple de Lindblad [Masset, 2002]. Même si les valeurs préconisées par les études de sensibilités se situent autour de $0.6 - 0.7$, les études faisant des simulations hydrodynamiques utilisent plus couramment une valeur de $b/h = 0.4$ [Paardekooper et al., 2011]. Il n'existe donc pas de valeur optimale pour la longueur de lissage quand le disque que l'on modélise est utilisé pour étudier la migration planétaire. Si cette section ne conclue pas quant à une valeur à utiliser pour b/h c'est avant tout pour insister sur le fait que la seule conclusion à tirer, c'est que la longueur de lissage est une source importance d'incertitude dans nos modèles. Une longueur de lissage importante (resp. faible) a tendance à favoriser la migration vers l'intérieur (resp. l'extérieur).



(a) $b/h = 0.5$

(b) $b/h = 0.76$ pour Γ_L et 0.5 pour Γ_C

FIGURE 4.16 – Comparaison d'un cas où la longueur de lissage est fixée à $b/h = 0.5$, et d'un autre cas où la longueur de lissage a été fixée à 0.76 pour le couple de Lindblad et à 0.5 pour le couple de Corotation, correspondant aux valeurs conseillées pour les deux couples séparés [Masset, 2002]. Pour plus de détails sur les cartes de migration [§ 3.2.3 page 65].

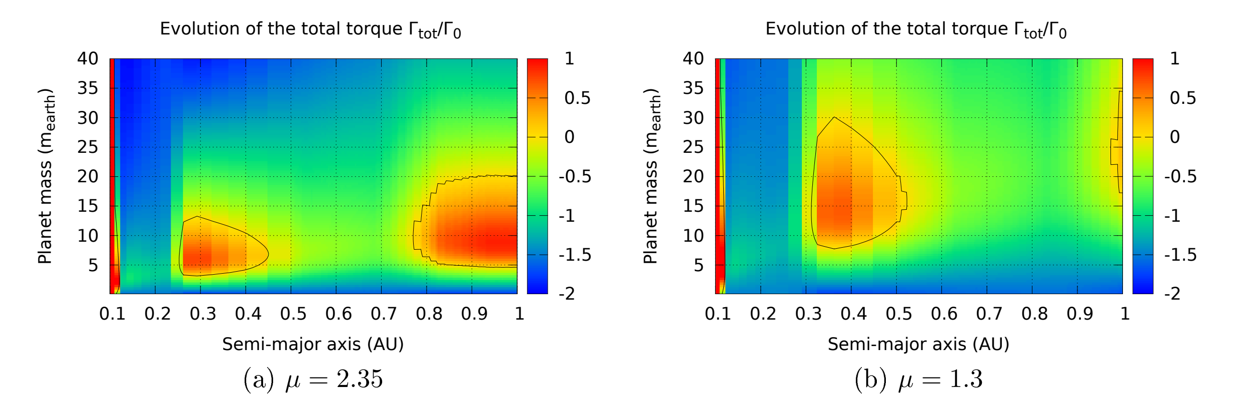
Inclure des formules pour la migration de type I nous offre une liberté supplémentaire par rapport aux simulations hydrodynamique, celle de fixer une longueur de lissage b/h différente pour le couple de Lindblad et pour le couple de Corotation. Suivant les prescriptions données par Masset [2002] j'ai donc calculé la carte de migration d'une simulation où je fixe une longueur de lissage $b/h = 0.76$ pour le couple de Lindblad, et une longueur de lissage $b/h = 0.5$ pour le couple de Corotation. J'obtiens alors les cartes représentées [FIGURE 4.16], toujours dans le cas du disque de référence.

mon cas à moi. J'aimerais voir si elle saurait m'expliquer pourquoi (dans mon cas j'ai une planète, et pas elle)

4.3.8 Masse moléculaire moyenne

La masse moléculaire moyenne μ va varier dans le disque, principalement à cause de l'évaporation de certaines espèces chimiques à différentes températures. La plupart sont

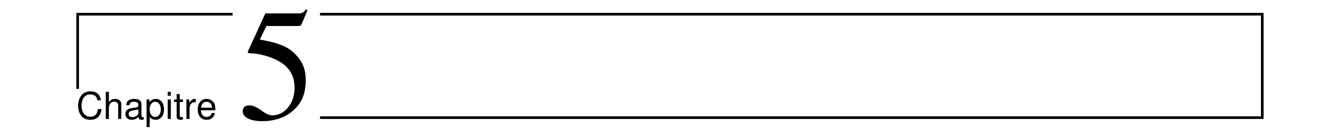
totalement négligeable vu leur abondance limitée. Le problème aurait pu se poser au bord interne du disque, où la température est très importante. Dans cette région là, la masse moléculaire moyenne peut varier à cause de la photodissociation de la molécule H_2. En supposant que le rapport d'abondance He/H = 0.1, la masse moléculaire, initialement de $\mu = 2.35$ passe alors à environ $\mu \sim 1.3$



(a) $\mu = 2.35$ (b) $\mu = 1.3$

FIGURE 4.17 – Influence de la masse moléculaire moyenne μ sur la carte de migration. Seules les parties très internes du disque sont ici représentées. Le même disque est utilisé, seule la masse moléculaire change afin de refléter l'influence de la photodissociation de H_2 en HI quand la température devient importante.

[FIGURE 4.17] montre l'influence de la masse moléculaire moyenne sur la carte de migration pour un disque donné. On s'attend à ce que la photodissociation de H_2 ne devienne importante que dans les parties très internes, bien en dessous de 1 UA. Dans ces régions là, on constate que la variation de la masse moléculaire moyenne n'a que peu d'effet. Il ne nous est donc pas apparu important de prendre cette variation en compte, les changements induits sur la carte de migration étant bien inférieur à l'influence du modèle d'opacité par exemple. Cette effet nous parait donc totalement négligeable au regard des incertitudes de notre modèle.



Discussion et limite du modèle

Sommaire

5.1 Étude de sensibilité

5.1.1 Le choix de la table d'opacité et son implémentation

5.1.2 Modélisation de la viscosité

5.2 Approximations

5.2.1 Profil de densité du gaz en 2D

5.2.2 La modélisation des bords du disque

5.2.3 Pas d'effet indirect des ondes de densité sur les autres planètes

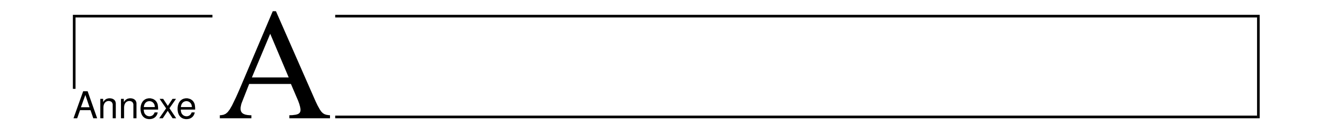
5.2.4 Auto-gravité

5.3 Idées

5.3.1 Snow line comme source de particules

Conclusion

J'ai cherché tout au long de ma thèse à développer un code numérique simple et modulaire avec une idée en tête, pouvoir tester les interactions et/ou différences entre différents modèles, que ce soit pour la viscosité, l'opacité, ou même des rétroactions subtiles comme celle de l'excentricité sur le couple de corotation.



Formulaire

Sommaire

Ici sont répertoriées bon nombre de formules que j'ai utilisé et qui relient des grandeurs physique entre elles. Dans la mesure du possible, une source est donnée où la formule est mentionnée. Ceci a pour but de centraliser ces formules, liées à la physique des disques, et que j'ai parfois eu du mal à retrouver parmis la quantité d'articles ou de livres traitant du sujet.

A.1 Variables usuelles

Dans la thèse, j'utilise couramment les mêmes notations pour une propriété physique donnée. Ici je fais un inventaire des notations, afin qu'on puisse s'y référer, et pour gagner en clarté dans le texte en m'évitant de redéfinir à chaque fois les mêmes unités :

ν	Viscosité du disque
c_s	vitesse du son
α	paramètre adimensionné pour la prescription α du disque, permettant de définir une viscosité fonction de la vitesse du son
H	Échelle de hauteur du disque
$h = H/R$	rapport d'aspect du disque
Ω	vitesse angulaire d'une particule fluide ou d'une planète dans le disque
k_B	constante de Boltzmann
T	Température
μ	Masse moléculaire moyenne du gaz constituant principal du disque
Σ	Densité de surface du disque de gaz
ρ	Densité volumique du disque de gaz
q	rapport adimensionné entre la masse de la planète et la masse de son étoile

Table A.1 – Liste de la plupart des variables utilisées tout au long de la thèse. Les paramètres avec un p en indice indiquent simplement que c'est la valeur du paramètre à la position orbitale de la planète.

A.2 Propriétés du disque

La prescription alpha pour la viscosité d'un disque est définie par :

$$\nu = \alpha c_s H \tag{A.1}$$

$$c_s = \sqrt{\frac{k_B T}{\mu m_H}} \tag{A.2}$$

$$H = \frac{1}{\Omega}\sqrt{\frac{k_B T}{\mu m_H}} \tag{A.3}$$

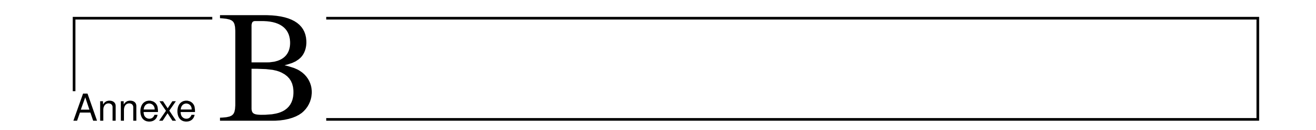
$$= \frac{c_s}{\Omega} \tag{A.4}$$

où m_H est la masse d'un atome d'hydrogène.

On considère que la densité de surface est égale à la densité volumique, intégrée sur la taille verticale $2H$ du disque.

$$\Sigma = 2\rho H \tag{A.5}$$

A.3 Propriétés des orbites kepleriennes



Physique des disques

Sommaire

Ce chapitre est destiné à détailler les calculs redémontrant les équations fondamentales de la physique des disques. Dans le premier chapitre de la thèse, je fais des démonstrations somme toute assez succinctes mais durant ma thèse j'ai été amené à les redémontrer et j'ai eu besoin de bien plus d'étapes détaillées de calcul que ce que j'ai pu trouver dans les papiers. J'ai donc entrepris de le refaire en détail, et je regroupe ici les étapes de calcul et les astuces nécessaires pour arriver aux équations.

B.1 Bilan de moment angulaire

On cherche à faire le bilan de moment cinétique sur l'anneau décrit [FIGURE 1.3 page 18]. Son moment cinétique est défini par :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{J_a} &= \overrightarrow{R} \wedge (m_a \overrightarrow{v(R)}) \\
&= m_a \cdot R \cdot R\Omega(R)\hat{e}_z \\
&= 2\pi R \Delta R \Sigma(R) \cdot R \cdot R\Omega(R)\hat{e}_z \\
\overrightarrow{J_a} &= 2\pi R^3 \Delta R \Sigma(R)\Omega(R)\hat{e}_z \qquad \text{(B.1)}
\end{aligned}$$

où Σ et Ω sont la densité de surface et la vitesse angulaire du gaz à la position R dans le disque.

Le flux de moment cinétique est simplement défini comme la quantité de moment cinétique emportée ou apportée par le flux de masse définis précédemment (1.16 page 19) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}J(R) &= \overrightarrow{r} \wedge (\mathrm{d}F_M(R)\overrightarrow{v}(R)) \\
&= \mathrm{d}F_M(R) \cdot R^2\Omega(R)\hat{e}_z \\
\mathrm{d}J(R) &= 2\pi v_r(R)\Sigma(R) \cdot R^3\Omega(R)\hat{e}_z \qquad \text{(B.2a)} \\
\mathrm{d}J(R+\Delta R) &= \overrightarrow{r} \wedge (\mathrm{d}M(R+\Delta R)\overrightarrow{v}(R+\Delta R)) \\
&= \mathrm{d}F_M(R+\Delta R) \cdot (R+\Delta R)^2\,\Omega(R+\Delta R)\hat{e}_z \\
\mathrm{d}J(R+\Delta R) &= -2\pi v_r(R+\Delta R)\Sigma(R+\Delta R) \cdot (R+\Delta R)^3\,\Omega(R+\Delta R)\hat{e}_z \qquad \text{(B.2b)}
\end{aligned}$$

À ceci s'ajoute la variation de moment cinétique induite par la friction entre anneaux concentriques, en d'autres termes, dus à la viscosité du disque. Cette variation de moment cinétique est représentée sous la forme d'un couple exercé par les anneaux internes et externes à celui considéré.

Le taux de cisaillement A est donné par :

$$A = r\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r} \qquad \text{(B.3)}$$

et représente les frottements induits par la rotation différentielle.

La force visqueuse par unité de longueur est définie par :

$$\mathrm{d}F_{\text{vis}} = \nu\Sigma A = \nu\Sigma r\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r} \qquad \text{(B.4)}$$

La force visqueuse induite par les anneaux entourant l'anneau considéré est alors :

$$\overrightarrow{F_{\text{in}}}(R) = 2\pi R \times \mathrm{d}F_{\text{vis}}(R)$$
$$\overrightarrow{F_{\text{in}}}(R) = 2\pi\nu\Sigma R^2 \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}(R)\hat{e}_\theta \tag{B.5a}$$
$$\overrightarrow{F_{\text{out}}}(R+\Delta R) = 2\pi(R+\Delta R) \times \mathrm{d}F_{\text{vis}}(R+\Delta R)$$
$$\overrightarrow{F_{\text{out}}}(R+\Delta R) = 2\pi\nu\Sigma(R+\Delta R)^2 \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}(R+\Delta R)\cdot\hat{e}_\theta \tag{B.5b}$$

L'anneau interne tournant plus vite, la force est dirigée dans le sens de rotation $\hat{e}_\theta$. À l'inverse, l'anneau externe tourne moins vite, il tend à freiner l'anneau de référence et s'oppose à son mouvement. La force est donc opposée au sens de rotation.

Ainsi, le couple $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{F}$ issu de chacun des anneaux entourant celui de référence s'écrit :

$$\overrightarrow{\Gamma_{\text{in}}} = R\hat{e}_r \wedge \overrightarrow{F_{\text{in}}}$$
$$\overrightarrow{\Gamma_{\text{in}}} = 2\pi\nu\Sigma R^3 \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}(R)\hat{e}_z \tag{B.6a}$$
$$\overrightarrow{\Gamma_{\text{out}}} = (R+\Delta R)\hat{e}_r \wedge \overrightarrow{F_{\text{out}}}$$
$$\overrightarrow{\Gamma_{\text{out}}} = 2\pi\nu\Sigma(R+\Delta R)^3 \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}(R+\Delta R)\hat{e}_z \tag{B.6b}$$

On fait maintenant un bilan des variations de moment angulaire pour l'anneau de gaz. Pour cela on dit que la variation de moment angulaire (que l'on écrit en dérivant $J_a(t)$) est égale aux variations de moment angulaires induites aux bords de l'anneau par échange de masse à laquelle s'ajoute la différence entre les deux couples visqueux qui s'appliquent au bord externe et interne. Ce qui donne :

$$\frac{\mathrm{d}J_a}{\mathrm{d}t} = \mathrm{d}J(R+\Delta R) + \mathrm{d}J(R) + \Gamma_{\text{out}} - \Gamma_{\text{in}} \tag{B.7}$$

En utilisant (B.1 page précédente), (B.2 page ci-contre), (B.6), dans (B.7)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(2\pi R^3\Delta R\Sigma(R)\Omega(R)\right) = &-(R+\Delta R)^3 v_R(R+\Delta R)\Sigma(R+\Delta R)\Omega(R+\Delta R)\\ &+R^3 v_R(R)\Sigma(R)\Omega(R) + \Big[\nu(R+\Delta R)^3\Sigma(R+\Delta R)\\ &\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}(R+\Delta R) - \nu\Sigma(R)R^3\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}(R)\Big]\end{aligned}$$

On fait tendre ΔR vers 0, et de manière similaire au bilan de masse obtenu précédemment, il vient alors

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(R^3\Sigma\Omega\right) = -\frac{\partial}{\partial r}\left(R^3 v_R\Sigma\Omega\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\nu\Sigma R^3\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}\right)$$

R et t sont des variables indépendantes, on peut donc sortir R de la dérivée partielle temporelle afin de faire apparaître une forme qui fait penser à une équation de continuité.

$$R\,\frac{\partial}{\partial t}\left(R^2\Sigma\Omega\right) = -\,\frac{\partial}{\partial r}\left(R^3 v_R \Sigma\Omega\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\nu\Sigma R^3\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}\right)$$

R et t étant des variables indépendantes, on peut écrire :

$$R\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\Sigma R^2\Omega\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(R^3 v_R \Sigma\Omega\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\nu\Sigma R^3\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}\right) \tag{B.8}$$

On suppose que $\dfrac{\partial\Omega}{\partial t} = 0$ vu que le potentiel gravitationnel est indépendant du temps (on ne considère pas une masse variable de l'étoile due à l'accrétion), et sachant que R ne dépend pas explicitement de t, en utilisant la formule :

$$\frac{\partial uv}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\,v + u\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Sigma\cdot R^2\Omega\right) = \left(R^2\Omega\right)\frac{\partial\Sigma}{\partial t} + \Sigma\cancelto{0}{\frac{\partial R^2\Omega}{\partial t}} \tag{B.9}$$

De même :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}\left(R^3 v_R\Sigma\Omega\right) &= \frac{\partial}{\partial r}\left(R v_R\Sigma\cdot R^2\Omega\right)\\ &= \left(R^2\Omega\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(R v_R\Sigma\right) + R\Sigma v_R\,\frac{\partial}{\partial r}\left(R^2\Omega\right)\end{aligned} \tag{B.10}$$

En utilisant (B.9) et (B.10) dans (B.8), on fait alors apparaître (1.17 page 19), ce qui donne :

$$\begin{aligned}R\left(R^2\Omega\right)\frac{\partial\Sigma}{\partial t} + \left(R^2\Omega\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(R v_R\Sigma\right) + R\Sigma v_R\,\frac{\partial}{\partial r}\left(R^2\Omega\right) &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\nu\Sigma R^3\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}\right)\\ \left(R^2\Omega\right)\cancelto{0}{\left[R\,\frac{\partial\Sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}\left(R v_R\Sigma\right)\right]} + R\Sigma v_R\,\frac{\partial}{\partial r}\left(R^2\Omega\right) &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\nu\Sigma R^3\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}\right)\\ R\Sigma v_R\,\frac{\partial}{\partial r}\left(R^2\Omega\right) &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\nu\Sigma R^3\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}\right)\\ R\Sigma v_R &= \frac{1}{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\Omega\right)}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\nu\Sigma R^3\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}\right)\end{aligned} \tag{B.11}$$

On injecte alors (B.11) dans (1.17 page 19) afin de supprimer v_r de l'expression et obtenir finalement :

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial t} = -\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\frac{\partial}{\partial r}\left(R^2\Omega\right)}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\nu\Sigma r^3\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}\right)\right]$$

On décale le signe moins au niveau de la dérivée de la vitesse angulaire, cette dernière étant généralement négative, ça permet d'avoir un terme positif :

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\Omega\right)}\frac{\partial}{\partial r}\left[\nu\Sigma r^3\left(-\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}r}\right)\right]\right\} \tag{B.12}$$

On fait maintenant l'approximation que le mouvement est képlerien, avec pour première conséquence que $\Omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$. On peut alors simplifier l'équation :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Sigma}{\partial t} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{GM}{r}}}\frac{\partial}{\partial r}\left[\nu\Sigma r^3\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{GM}{r^5}}\right)\right]\right\} \\ &= \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\cancel{2}\sqrt{\frac{r}{\cancel{GM}}}\frac{\partial}{\partial r}\left[\nu\Sigma\frac{3}{\cancel{2}}\cancel{\sqrt{GM}}r^{1/2}\right]\right\}\end{aligned}$$

Conclusion de la partie

On obtient alors l'équation suivante :

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\sqrt{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\nu\Sigma r^{1/2}\right)\right] \tag{B.13}$$

Bibliographie

D. R. Alexander and J. W. Ferguson. Low-temperature Rosseland opacities. ApJ, 437 : 879–891, December 1994. doi : 10.1086/175039.

R. D. Alexander, C. J. Clarke, and J. E. Pringle. Photoevaporation of protoplanetary discs - II. Evolutionary models and observable properties. MNRAS, 369 :229–239, June 2006. doi : 10.1111/j.1365-2966.2006.10294.x.

Ph André. The initial conditions for protostellar collapse : observational constraints. *EAS Publications Series*, 3 :1–38, 2002.

P. J. Armitage. Dynamics of Protoplanetary Disks. ARA&A, 49 :195–236, September 2011. doi : 10.1146/annurev-astro-081710-102521.

S. A. Balbus and J. F. Hawley. A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. I - Linear analysis. II - Nonlinear evolution. ApJ, 376 :214–233, July 1991. doi : 10.1086/170270.

C. Baruteau and F. Masset. On the Corotation Torque in a Radiatively Inefficient Disk. ApJ, 672 :1054–1067, January 2008. doi : 10.1086/523667.

C. Baruteau and F. Masset. Recent Developments in Planet Migration Theory. In J. Souchay, S. Mathis, and T. Tokieda, editors, *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, volume 861 of *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, page 201, 2013. doi : 10.1007/978-3-642-32961-6_6.

K. R. Bell and D. N. C. Lin. Using FU Orionis outbursts to constrain self-regulated protostellar disk models. ApJ, 427 :987–1004, June 1994. doi : 10.1086/174206.

K. R. Bell, P. M. Cassen, H. H. Klahr, and T. Henning. The Structure and Appearance of Protostellar Accretion Disks : Limits on Disk Flaring. ApJ, 486 :372, September 1997. doi : 10.1086/304514.

J. Binney and S. Tremaine. *Galactic Dynamics : Second Edition*. Princeton University Press, 2008.

B. Bitsch and W. Kley. Orbital evolution of eccentric planets in radiative discs. A&A, 523 :A30, November 2010. doi : 10.1051/0004-6361/201014414.

B. Bitsch and W. Kley. Range of outward migration and influence of the disc's mass on the migration of giant planet cores. A&A, 536 :A77, December 2011. doi : 10.1051/0004-6361/201117202.

B. Bitsch, A. Boley, and W. Kley. Influence of viscosity and the adiabatic index on planetary migration. A&A, 550 :A52, February 2013. doi : 10.1051/0004-6361/201118490.

J. E. Chambers. A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies. MNRAS, 304 :793–799, April 1999. doi : 10.1046/j.1365-8711.1999.02379.x.

J. E. Chambers. An Analytic Model for the Evolution of a Viscous, Irradiated Disk. ApJ, 705 :1206–1214, November 2009. doi : 10.1088/0004-637X/705/2/1206.

S. Chapman and T. G. Cowling. *The mathematical theory of non-uniform gases. an account of the kinetic theory of viscosity, thermal conduction and diffusion in gases.* Cambridge University Press, 1970.

E. Chiang and G. Laughlin. The minimum-mass extrasolar nebula : in situ formation of close-in super-Earths. MNRAS, 431 :3444–3455, June 2013. doi : 10.1093/mnras/stt424.

E. I. Chiang and P. Goldreich. Spectral Energy Distributions of T Tauri Stars with Passive Circumstellar Disks. ApJ, 490 :368, November 1997. doi : 10.1086/304869.

C. J. Clarke, A. Gendrin, and M. Sotomayor. The dispersal of circumstellar discs : the role of the ultraviolet switch. MNRAS, 328 :485–491, December 2001. doi : 10.1046/j.1365-8711.2001.04891.x.

C. Cossou, S. N. Raymond, and A. Pierens. Convergence zones for Type I migration : an inward shift for multiple planet systems. A&A, 553 :L2, May 2013. doi : 10.1051/0004-6361/201220853.

P. Cresswell and R. P. Nelson. Three-dimensional simulations of multiple protoplanets embedded in a protostellar disc. A&A, 482 :677–690, May 2008. doi : 10.1051/0004-6361:20079178.

P. Cresswell, G. Dirksen, W. Kley, and R. P. Nelson. On the evolution of eccentric and inclined protoplanets embedded in protoplanetary disks. A&A, 473 :329–342, October 2007. doi : 10.1051/0004-6361:20077666.

T. Currie, C. J. Lada, P. Plavchan, T. P. Robitaille, J. Irwin, and S. J. Kenyon. The Last Gasp of Gas Giant Planet Formation : A Spitzer Study of the 5 Myr Old Cluster NGC 2362. ApJ, 698 :1–27, June 2009. doi : 10.1088/0004-637X/698/1/1.

M. de Val-Borro, R. G. Edgar, P. Artymowicz, P. Ciecielag, P. Cresswell, G. D'Angelo, E. J. Delgado-Donate, G. Dirksen, S. Fromang, A. Gawryszczak, H. Klahr, W. Kley, W. Lyra, F. Masset, G. Mellema, R. P. Nelson, S.-J. Paardekooper, A. Peplinski, A. Pierens, T. Plewa, K. Rice, C. Schäfer, and R. Speith. A comparative study of disc-planet interaction. MNRAS, 370 :529–558, August 2006. doi : 10.1111/j.1365-2966.2006.10488.x.

E. D'Onghia, M. Vogelsberger, and L. Hernquist. Self-perpetuating Spiral Arms in Disk Galaxies. ApJ, 766 :34, March 2013. doi : 10.1088/0004-637X/766/1/34.

A. Duquennoy and M. Mayor. Multiplicity among solar-type stars in the solar neighbourhood. II - Distribution of the orbital elements in an unbiased sample. A&A, 248 : 485–524, August 1991.

E. Everhart. An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings. In A. Carusi and G. B. Valsecchi, editors, *Dynamics of Comets : Their Origin and Evolution, Proceedings of IAU Colloq. 83, held in Rome, Italy, June 11-15, 1984. Edited by Andrea Carusi and Giovanni B. Valsecchi. Dordrecht : Reidel, Astrophysics and Space Science Library. Volume 115, 1985, p.185*, page 185, 1985.

J. Fang and J.-L. Margot. Are Planetary Systems Filled to Capacity ? A Study Based on Kepler Results. ApJ, 767 :115, April 2013. doi : 10.1088/0004-637X/767/2/115.

D. A. Fischer and J. Valenti. The Planet-Metallicity Correlation. ApJ, 622 :1102–1117, April 2005. doi : 10.1086/428383.

F. Fressin, G. Torres, D. Charbonneau, S. T. Bryson, J. Christiansen, C. D. Dressing, J. M. Jenkins, L. M. Walkowicz, and N. M. Batalha. The False Positive Rate of Kepler and the Occurrence of Planets. ApJ, 766 :81, April 2013. doi : 10.1088/0004-637X/766/2/81.

C. F. Gammie. Layered Accretion in T Tauri Disks. ApJ, 457 :355, January 1996. doi : 10.1086/176735.

C. F. Gammie. Nonlinear Outcome of Gravitational Instability in Cooling, Gaseous Disks. ApJ, 553 :174–183, May 2001. doi : 10.1086/320631.

P. Goldreich and D. Lynden-Bell. I. Gravitational stability of uniformly rotating disks. MNRAS, 130 :97, 1965.

P. Goldreich and S. Tremaine. The excitation of density waves at the Lindblad and corotation resonances by an external potential. ApJ, 233 :857–871, November 1979. doi : 10.1086/157448.

R. A. Gutermuth, P. C. Myers, S. T. Megeath, L. E. Allen, J. L. Pipher, J. Muzerolle, A. Porras, E. Winston, and G. Fazio. Spitzer Observations of NGC 1333 : A Study of Structure and Evolution in a Nearby Embedded Cluster. ApJ, 674 :336–356, February 2008. doi : 10.1086/524722.

Y. Hasegawa and R. E. Pudritz. The origin of planetary system architectures - I. Multiple planet traps in gaseous discs. MNRAS, 417 :1236–1259, October 2011. doi : 10.1111/j.1365-2966.2011.19338.x.

C. Hayashi. Structure of the Solar Nebula, Growth and Decay of Magnetic Fields and Effects of Magnetic and Turbulent Viscosities on the Nebula. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 70 :35–53, 1981. doi : 10.1143/PTPS.70.35.

T. Henning and R. Stognienko. Dust opacities for protoplanetary accretion disks : influence of dust aggregates. A&A, 311 :291–303, July 1996.

B. Horn, W. Lyra, M.-M. Mac Low, and Z. Sándor. Orbital Migration of Interacting Low-mass Planets in Evolutionary Radiative Turbulent Models. ApJ, 750 :34, May 2012. doi : 10.1088/0004-637X/750/1/34.

A. W. Howard, G. W. Marcy, S. T. Bryson, J. M. Jenkins, J. F. Rowe, N. M. Batalha, W. J. Borucki, D. G. Koch, E. W. Dunham, T. N. Gautier, III, J. Van Cleve, W. D. Cochran, D. W. Latham, J. J. Lissauer, G. Torres, T. M. Brown, R. L. Gilliland, L. A. Buchhave, D. A. Caldwell, J. Christensen-Dalsgaard, D. Ciardi, F. Fressin, M. R. Haas, S. B. Howell, H. Kjeldsen, S. Seager, L. Rogers, D. D. Sasselov, J. H. Steffen, G. S. Basri, D. Charbonneau, J. Christiansen, B. Clarke, A. Dupree, D. C. Fabrycky, D. A. Fischer, E. B. Ford, J. J. Fortney, J. Tarter, F. R. Girouard, M. J. Holman, J. A. Johnson, T. C. Klaus, P. Machalek, A. V. Moorhead, R. C. Morehead, D. Ragozzine, P. Tenenbaum, J. D. Twicken, S. N. Quinn, H. Isaacson, A. Shporer, P. W. Lucas, L. M. Walkowicz, W. F. Welsh, A. Boss, E. Devore, A. Gould, J. C. Smith, R. L. Morris, A. Prsa, T. D. Morton, M. Still, S. E. Thompson, F. Mullally, M. Endl, and P. J. MacQueen. Planet Occurrence within 0.25 AU of Solar-type Stars from Kepler. ApJS, 201 :15, August 2012. doi : 10.1088/0067-0049/201/2/15.

A.W. Howard, G.W. Marcy, J.A. Johnson, D.A. Fischer, J.T. Wright, H. Isaacson, J.A. Valenti, J. Anderson, D.N.C. Lin, and S. Ida. The occurrence and mass distribution of close-in super-earths, neptunes, and jupiters. *Science*, 330(6004) :653–655, 2010.

I. Hubeny. Vertical structure of accretion disks - A simplified analytical model. ApJ, 351 :632–641, March 1990. doi : 10.1086/168501.

J.-M. Huré. On the transition to self-gravity in low mass AGN and YSO accretion discs. A&A, 358 :378–394, June 2000.

J.-M. Huré and A. Pierens. A local prescription for the softening length in self-gravitating gaseous discs. A&A, 507 :573–579, November 2009. doi : 10.1051/0004-6361/200912348.

M. Ilgner and R. P. Nelson. On the ionisation fraction in protoplanetary disks. I. Comparing different reaction networks. A&A, 445 :205–222, January 2006. doi : 10.1051/0004-6361:20053678.

J. A. Johnson, R. P. Butler, G. W. Marcy, D. A. Fischer, S. S. Vogt, J. T. Wright, and K. M. G. Peek. A New Planet around an M Dwarf : Revealing a Correlation between Exoplanets and Stellar Mass. ApJ, 670 :833–840, November 2007. doi : 10.1086/521720.

S. J. Kenyon and B. C. Bromley. Terrestrial Planet Formation. I. The Transition from Oligarchic Growth to Chaotic Growth. AJ, 131 :1837–1850, March 2006. doi : 10.1086/499807.

W. Kley and A. Crida. Migration of protoplanets in radiative discs. A&A, 487 :L9–L12, August 2008. doi : 10.1051/0004-6361:200810033.

K. A. Kretke and D. N. C. Lin. The Importance of Disk Structure in Stalling Type I Migration. ApJ, 755 :74, August 2012. doi : 10.1088/0004-637X/755/1/74.

C. J. Lada, A. A. Muench, K. L. Luhman, L. Allen, L. Hartmann, T. Megeath, P. Myers, G. Fazio, K. Wood, J. Muzerolle, G. Rieke, N. Siegler, and E. Young. Spitzer Observations of IC 348 : The Disk Population at 2-3 Million Years. AJ, 131 :1574–1607, March 2006. doi : 10.1086/499808.

L Landau and E Lifschitz. *Mécanique des fluides, vol. 6.* Éditions Mir, Paris, 752pp, 1989.

D. N. C. Lin and J. Papaloizou. On the tidal interaction between protoplanets and the protoplanetary disk. III - Orbital migration of protoplanets. ApJ, 309 :846–857, October 1986. doi : 10.1086/164653.

J. J. Lissauer, D. Ragozzine, D. C. Fabrycky, J. H. Steffen, E. B. Ford, J. M. Jenkins, A. Shporer, M. J. Holman, J. F. Rowe, E. V. Quintana, N. M. Batalha, W. J. Borucki, S. T. Bryson, D. A. Caldwell, J. A. Carter, D. Ciardi, E. W. Dunham, J. J. Fortney, T. N. Gautier, III, S. B. Howell, D. G. Koch, D. W. Latham, G. W. Marcy, R. C. Morehead, and D. Sasselov. Architecture and Dynamics of Kepler's Candidate Multiple Transiting Planet Systems. ApJS, 197 :8, November 2011. doi : 10.1088/0067-0049/197/1/8.

W. Lyra, S.-J. Paardekooper, and M.-M. Mac Low. Orbital Migration of Low-mass Planets in Evolutionary Radiative Models : Avoiding Catastrophic Infall. ApJ, 715 : L68–L73, June 2010. doi : 10.1088/2041-8205/715/2/L68.

C. Marchal and G. Bozis. Hill Stability and Distance Curves for the General Three-Body Problem. *Celestial Mechanics*, 26 :311–333, March 1982. doi : 10.1007/BF01230725.

F. S. Masset. On the Co-orbital Corotation Torque in a Viscous Disk and Its Impact on Planetary Migration. ApJ, 558 :453–462, September 2001. doi : 10.1086/322446.

F. S. Masset. The co-orbital corotation torque in a viscous disk : Numerical simulations. A&A, 387 :605–623, May 2002. doi : 10.1051/0004-6361:20020240.

F. S. Masset. On type-I migration near opacity transitions. A generalized Lindblad torque formula for planetary population synthesis. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 111 :131–160, October 2011. doi : 10.1007/s10569-011-9364-0.

F. S. Masset, A. Morbidelli, A. Crida, and J. Ferreira. Disk Surface Density Transitions as Protoplanet Traps. ApJ, 642 :478–487, May 2006. doi : 10.1086/500967.

M. Mayor and D. Queloz. A Jupiter-mass companion to a solar-type star. Nature, 378 : 355–359, November 1995. doi : 10.1038/378355a0.

M. Mayor, C. Lovis, F. Pepe, D. Ségransan, and S. Udry. The road to Earth twins. *Astronomische Nachrichten*, 332 :429, June 2011. doi : 10.1002/asna.201111558.

K. Menou and J. Goodman. Low-Mass Protoplanet Migration in T Tauri α-Disks. ApJ, 606 :520–531, May 2004. doi : 10.1086/382947.

A. Morbidelli, A. Crida, F. Masset, and R. P. Nelson. Building giant-planet cores at a planet trap. A&A, 478 :929–937, February 2008. doi : 10.1051/0004-6361:20078546.

C. Mordasini, K.-M. Dittkrist, Y. Alibert, H. Klahr, W. Benz, and T. Henning. Application of recent results on the orbital migration of low mass planets : convergence zones. In A. Sozzetti, M. G. Lattanzi, and A. P. Boss, editors, *IAU Symposium*, volume 276 of *IAU Symposium*, pages 72–75, November 2011. doi : 10.1017/S174392131101996X.

T. W. A. Müller, W. Kley, and F. Meru. Treating gravity in thin-disk simulations. A&A, 541 :A123, May 2012. doi : 10.1051/0004-6361/201118737.

C. D. Murray and S. F. Dermott. *Solar System Dynamics*. Cambridge : University Press, February 2000.

A. J. Mustill and M. C. Wyatt. A general model of resonance capture in planetary systems : first- and second-order resonances. MNRAS, 413 :554–572, May 2011. doi : 10.1111/j.1365-2966.2011.18201.x.

R. P. Nelson, J. C. B. Papaloizou, F. Masset, and W. Kley. The migration and growth of protoplanets in protostellar discs. MNRAS, 318 :18–36, October 2000. doi : 10.1046/j.1365-8711.2000.03605.x.

M. Ogihara, S. Ida, and A. Morbidelli. Accretion of terrestrial planets from oligarchs in a turbulent disk. Icarus, 188 :522–534, June 2007. doi : 10.1016/j.icarus.2006.12.006.

G. I. Ogilvie and S. H. Lubow. On the wake generated by a planet in a disc. MNRAS, 330 :950–954, March 2002. doi : 10.1046/j.1365-8711.2002.05148.x.

G. I. Ogilvie and S. H. Lubow. Saturation of the Corotation Resonance in a Gaseous Disk. ApJ, 587 :398–406, April 2003. doi : 10.1086/368178.

S.-J. Paardekooper and G. Mellema. Halting type I planet migration in non-isothermal disks. A&A, 459 :L17–L20, November 2006. doi : 10.1051/0004-6361:20066304.

S.-J. Paardekooper and J. C. B. Papaloizou. On corotation torques, horseshoe drag and the possibility of sustained stalled or outward protoplanetary migration. MNRAS, 394 :2283–2296, April 2009. doi : 10.1111/j.1365-2966.2009.14511.x.

S.-J. Paardekooper, C. Baruteau, A. Crida, and W. Kley. A torque formula for non-isothermal type I planetary migration - I. Unsaturated horseshoe drag. MNRAS, 401 : 1950–1964, January 2010. doi : 10.1111/j.1365-2966.2009.15782.x.

S.-J. Paardekooper, C. Baruteau, and W. Kley. A torque formula for non-isothermal Type I planetary migration - II. Effects of diffusion. MNRAS, 410 :293–303, January 2011. doi : 10.1111/j.1365-2966.2010.17442.x.

J. C. B. Papaloizou and J. D. Larwood. On the orbital evolution and growth of protoplanets embedded in a gaseous disc. MNRAS, 315 :823–833, July 2000. doi : 10.1046/j.1365-8711.2000.03466.x.

A. Pierens, C. Baruteau, and F. Hersant. On the dynamics of resonant super-Earths in disks with turbulence driven by stochastic forcing. A&A, 531 :A5, July 2011. doi : 10.1051/0004-6361/201116611.

A. Pierens, C. Baruteau, and F. Hersant. Protoplanetary migration in non-isothermal discs with turbulence driven by stochastic forcing. MNRAS, 427 :1562–1573, December 2012. doi : 10.1111/j.1365-2966.2012.22013.x.

W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical recipes in FORTRAN. The art of scientific computing.* Cambridge university press, 1992.

J. E. Pringle. Accretion discs in astrophysics. ARA&A, 19 :137–162, 1981. doi : 10.1146/annurev.aa.19.090181.001033.

S. N. Raymond, R. Barnes, and A. M. Mandell. Observable consequences of planet formation models in systems with close-in terrestrial planets. MNRAS, 384 :663–674, February 2008. doi : 10.1111/j.1365-2966.2007.12712.x.

Z. Sándor, W. Lyra, and C. P. Dullemond. Formation of Planetary Cores at Type I Migration Traps. ApJ, 728 :L9, February 2011. doi : 10.1088/2041-8205/728/1/L9.

M. J. Seaton, Y. Yan, D. Mihalas, and A. K. Pradhan. Opacities for Stellar Envelopes. MNRAS, 266 :805, February 1994.

N. I. Shakura and R. A. Sunyaev. Black holes in binary systems. Observational appearance. A&A, 24 :337–355, 1973.

M. Simon and L. Prato. Disk Dissipation in Single and Binary Young Star Systems in Taurus. ApJ, 450 :824, September 1995. doi : 10.1086/176187.

J Stoer and R Burlisch. *Introduction to numerical analysis.* Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1980.

H. Sung, J. R. Stauffer, and M. S. Bessell. A Spitzer View of the Young Open Cluster NGC 2264. AJ, 138 :1116–1136, October 2009. doi : 10.1088/0004-6256/138/4/1116.

H. Tanaka and W. R. Ward. Three-dimensional Interaction between a Planet and an Isothermal Gaseous Disk. II. Eccentricity Waves and Bending Waves. ApJ, 602 : 388–395, February 2004. doi : 10.1086/380992.

H. Tanaka, T. Takeuchi, and W. R. Ward. Three-Dimensional Interaction between a Planet and an Isothermal Gaseous Disk. I. Corotation and Lindblad Torques and Planet Migration. ApJ, 565 :1257–1274, February 2002. doi : 10.1086/324713.

C. Terquem and J. C. B. Papaloizou. Migration and the Formation of Systems of Hot Super-Earths and Neptunes. ApJ, 654 :1110–1120, January 2007. doi : 10.1086/509497.

A. Toomre. On the gravitational stability of a disk of stars. ApJ, 139 :1217–1238, May 1964. doi : 10.1086/147861.

S. Udry and N. C. Santos. Statistical Properties of Exoplanets. ARA&A, 45 :397–439, September 2007. doi : 10.1146/annurev.astro.45.051806.110529.

W. R. Ward. Protoplanet Migration by Nebula Tides. Icarus, 126 :261–281, April 1997. doi : 10.1006/icar.1996.5647.

G. W. Wetherill. Formation of the earth. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 18 :205–256, 1990. doi : 10.1146/annurev.ea.18.050190.001225.

J. P. Williams and L. A. Cieza. Protoplanetary Disks and Their Evolution. ARA&A, 49 :67–117, September 2011. doi : 10.1146/annurev-astro-081710-102548.

E. Winston, S. T. Megeath, S. J. Wolk, J. Muzerolle, R. Gutermuth, J. L. Hora, L. E. Allen, B. Spitzbart, P. Myers, and G. G. Fazio. A Combined Spitzer and Chandra Survey of Young Stellar Objects in the Serpens Cloud Core. ApJ, 669 :493–518, November 2007. doi : 10.1086/521384.

J. Wisdom and M. Holman. Symplectic maps for the n-body problem. AJ, 102 :1528–1538, October 1991. doi : 10.1086/115978.

S. J. Wolk and F. M. Walter. A Search for Protoplanetary Disks Around Naked T Tauri Stars. AJ, 111 :2066, May 1996. doi : 10.1086/117942.

A. Wolszczan and D. A. Frail. A planetary system around the millisecond pulsar PSR1257 + 12. Nature, 355 :145–147, January 1992. doi : 10.1038/355145a0.

Z. Zhu, L. Hartmann, and C. Gammie. Nonsteady Accretion in Protostars. ApJ, 694 : 1045–1055, April 2009. doi : 10.1088/0004-637X/694/2/1045.